SOC
7130

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

167.

Exchange.

October 9. 1908.

167

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VI.

DÉPOTS :

LONDRES, chez WILLIAMS et NORGATE, Henrietta Str., 14.

PARIS, chez HERMANN, libraire, rue de la Sorbonne, 8.

BERLIN, chez FRIEDLÄNDER u. Sohn, Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

AOUT 1906.

LIBRARY
MUS. COMP. ZOOLOGY
CAMBRIDGE, MASS.

OCT 9 1908

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÉGE.

Nec temere, nec timide.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VI.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez WILLIAMS et NORGATE,	chez HERMANN, libraire,	chez FRIEDLÄNDER u. Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue de la Sorbonne, 8.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE.

Rue de Louvain, 112

AOUT 1906.

ag 32/14

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME VI.

1. Sur la représentation de la forme biquadratique binaire; par J. Fairon.
2. Sur les points singuliers des lieux géométriques; par M. Stuyvaert.
3. Remarques sur un faisceau de coniques; par J. Fairon.
4. Sur les nombres plückériens de la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques possédant des courbes doubles; par le Dr W.-A. Versluys.
5. Recherches sur les fonctions cylindriques; par W. Kapteyn.
6. Trajectoire lumineuse et distance zénithale dans une atmosphère formée de couches planes parallèles; par G. Cesàro.
7. La matière, sa naissance, sa vie, sa fin; par P. De Heen.
8. De l'influence d'un contact ordinaire ou stationnaire de deux surfaces sur la développable circonscrite à ces deux surfaces; par W.-A. Versluys.
9. Sur le calcul numérique de la série $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2+\beta^2 s^2)^{\frac{q}{2}}}$; par W. Kapteyn.
10. Observations magnétiques; par M. Dehalu.
11. Description d'un cristal de calcite du Simplon; par Arthur Abraham.
12. Rhomboèdres direct et inverse qui, modifiant un scalénoèdre, coupent ses arêtes culminantes en des points situés dans un même plan horizontal, les faces modifiantes partant d'un même point de l'axe ternaire; par G. Cesàro.
13. Centre de gravité du triangle sphérique; par G. Cesàro.
14. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements; par M.-A. Gob.
15. Notes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements; par J. Neuberg.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

(AOUT 1906).

Bureau.

Président,	M. P. de Heen.
Vice-Président,	» M. Dehalu.
Secrétaire général,	» C. le Paige.
Trésorier-Bibliothécaire,	» J. Fairon.

Membres effectifs.

1860 Gillon, A., professeur émérite à l'université.

1870 Masius, V., professeur émérite à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1871 Van Beneden, Éd., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1878 le Paige, C., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1879 Jorissen, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1880 NEUBERG, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1881 FRAIPONT, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1884 DERUYTS, J., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

UBAGHS, P., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1885 GRAVIS, A., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1887 LOHEST, M., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

DE HEEN, P., professeur à l'université, membre de l'Académie royale de Belgique.

1890 BEAUPAIN, J., docteur en sciences, ingénieur principal au corps des mines.

1897 CESÀRO, G., professeur à l'université, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

1898 HUBERT, H., professeur à l'université, ingénieur en chef au corps des mines.

1900 LONAY, H., docteur en sciences, assistant à l'université.

1902 DEHALU, M., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

FAIRON, J., docteur en sciences, répétiteur à l'université.

1906 ABRAHAM, A., docteur en sciences, assistant à l'université.

Membres correspondants.

I. — Sciences physiques et mathématiques.

1853 Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1855 Liais, ancien directeur de l'Observatoire de Rio de Janeiro.

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

1866 Ledent, directeur de l'École des textiles de Verviers.

1867 Barnard, président de l'École des mines, à New-York.

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1871 Henry, L., professeur à l'université de Louvain.

Masters, Maxwell T., membre de la Société royale, à Londres.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.

Garibaldi, professeur à l'université de Gênes.

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg.

1875 Darboux, G., membre de l'Institut, à Paris.

1875 Mansion, P., professeur à l'université de Gand.

Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

1876 Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature*, à Paris.

1879 Czuber, professeur, à Prague.

1880 Van der Mensbrugghe, Gustave, professeur à l'université de Gand.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.

Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.

Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.

Quincke, professeur à l'université d'Heidelberg.

Laisant, C.-A., à Paris.

1882 Mascart, membre de l'Institut, à Paris.

1883 Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.

Gomès Teixeira, F., ancien professeur à l'université de Coïmbre.

1885 Schur, Fréd., professeur à l'université de Dorpat.

Picquet, répétiteur à l'École polytechnique, à Paris.

de Longchamps (Gohierre), professeur au lycée Charlemagne, à Paris.

Vaněček, J. S., professeur, à Jičin (Bohême).

Cesàro, E., professeur à l'université, à Naples.

1887 Walras, L., professeur à l'Académie de Lausanne.

Guccia, professeur à l'université de Palerme.

Wullner, professeur à l'École polytechnique d'Aix-la-Chapelle.

Paalzow, directeur de l'École technique de Berlin.

1888 Ocagne (Maurice d'), professeur à l'École des ponts et chaussées, à Paris.

1898 Gordan, P., professeur à l'université d'Erlangen.

1898 Korteweg, D.-J., professeur à l'université d'Amsterdam.

Lampe, Em., directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, professeur à Berlin.

Mathias, Em., professeur à l'université de Toulouse.

Brocard, H., ancien officier du génie, à Bar-le-Duc.

1902 Versluys, W.-A., docteur en sciences, à Delft.

1904 Lerch, Math., professeur à l'université de Fribourg (Suisse).

Schönfliess, professeur à l'université de Kœnigsberg in Pr.

Capelli, Alfr., professeur à l'université de Naples.

Meyer, Franz, professeur à l'université de Kœnigsberg in Pr.

W. Kapteyn, professeur à l'université d'Utrecht.

1905 Traube, professeur, à Berlin.

II. — Sciences naturelles.

1854 Drouët, H., naturaliste, à Dijon.

Lucas, H., aide-naturaliste au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille.

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

1870 Malaise, C., professeur émérite à l'Institut agronomique de Gembloux.

1871 Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

Glaziou, botaniste, à Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund.

1874 Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Berlin.

1875 Eimer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

Packard, professeur à l'université de Salem.

Flemming, W., professeur à l'université de Kiel.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

1876 Balfour, I. B., professeur de botanique à l'université, à Oxford.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

1878 Hertwig, R., professeur à l'université de Munich.

Strasburger, professeur à l'université de Bonn.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

1881 Taramelli, professeur à l'université de Pavie.

Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.

1881 Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.

1883 Hull, Edward, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.

1884 Trinchese, professeur à l'université de Naples.

1898 Agassiz, Alexandre, à Cambridge (Mass.).

Bertrand, C.-E., professeur de botanique à la Faculté des sciences de Lille.

Blanchard, Raphaël, assistant au Museum d'histoire naturelle, à Paris.

1904 Durrand, Th., directeur du jardin botanique de l'État à Bruxelles, correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Barrois, C., professeur à l'université de Lille.

Boule, Marcellin, professeur au Museum, à Paris.

Gaudry, A., membre de l'Institut, à Paris.

Oehlert, D., conservateur du Musée de Laval (Mayenne).

Portis, A., professeur à l'université de Rome.

von Koenen, A., professeur à l'université de Gœttingen.

de Loriol, P., géologue, à Fontenex.

Piette, E., juge honoraire, à Rumigny.

Grand'Eury, F., ingénieur, à Saint-Étienne.

de Rouville, P., doyen honoraire, à Montpellier.

Cocchi, J., directeur du Musée, à Florence.

Delgado, J.-N., directeur du Service géologique, à Lisbonne.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÉGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.
Musée royal d'histoire naturelle.

Liége. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

Gand. — *Mathesis,* directeurs : MM. P. Mansion et J. Neuberg.

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, directeur : M. Lampe (Kurfürstenstr., 159).

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königliche bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Agram. — *Académie Sudo-Slave des sciences.*

Cracovie. — *Académie des sciences.*

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.
Ceske Akademie Cisare Frantiska Josepha.

Trieste. — *Società adriatica di Scienzi naturali.*

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.
Monatshefte für Mathematik und Physik, rédacteurs : MM. Escherich et Gegenbauer, professeurs à l'université.

DANEMARK.

Copenhague. — *Tidskrift for Mathematik :* Drs Juel et Foldberg (Romersgade, 9).
Académie royale des sciences.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academia de Ciencias.*

FRANCE.

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*
Université.

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.
Université.

Marseille. — *Faculté des Sciences.*

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Nantes. — *Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France.*

Paris. — *Société Philomatique.*
Muséum d'histoire naturelle.
Société mathématique de France.
École polytechnique.
L'intermédiaire des mathématiciens, M. LAISANT (quai des Augustins, 55).

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Société des sciences physiques et naturelles.
Faculté des Sciences.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Royal Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*
Mathematical Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Florence. — *Institut supérieur.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Societa di scienze naturali e economiche.*
Circolo matematico.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*
Nuovo Cimento, rédacteurs : MM. Felici, Batelli et Volterra.

Rome. — *Reale Accademia dei Lincei.*
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

Turin. — *Reale Academia delle Scienze.*

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*
Société botanique du grand-duché de Luxembourg.

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*
Société mathématique.

Delft. — *École polytechnique.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*
Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Göteborg. — *Kongl. Vetenskaps och Vitterhetssamhälle.*
Stavanger. — *Museum.*
Throndhjem. — *K. Norske Videnskabers Selskabs.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques*, rédacteur : M. Gomès Teixeira.
Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*
Kazan. — *Société physico-mathématique.*
Kharkoff. — *Société mathématique.*
Juriew. — *Université.*
Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*
Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*
Archives des sciences biologiques.
Société d'archéologie et de numismatique.
Société entomologique.

SUÈDE.

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*
Entomologiska föreningen, 94, Drottninggatan.
Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.
Upsal. — *Société royale des Sciences.*

SUISSE.

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.
Genève. — *L'enseignement mathématique*, directeurs : MM. Fehr et Laisant (rue Plantamour, 19).
Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*
Schaffhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Zurich. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

ÉTATS-UNIS.

Austin. — *Texas Academy of sciences.*

Baltimore. — *American Journal of mathematics. (Johns Hopkins University.)*

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Halifax. — *Nova Scotian Institute of Natural Science.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*
Museum of natural history.
American Mathematical Society.

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Rochester. — *Academy of sciences.*

Saint-Louis, Mo. — *Botanical Garden.*

Salem. — *Essex Institute.*
American Association for advancement of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

CANADA.

Ottawa. — *Geological Survey of Canada.*
Commission de géologie et d'histoire naturelle du Canada.

Toronto. — *Canadian Institute.*

CHILI.

Santiago. — *Société scientifique du Chili.*

MEXIQUE.

Mexico. — *Société Antonio Alzate.*
Observatoire météorologique central.

Tacubaya. — *Observatoire national.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

—

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

SIBÉRIE.

Irkutsk. — *Ostsibirische Abtheilung der K. Russischen geographischen Gesellschaft.*

AUSTRALIE.

Adelaïde. — *Australian Association for advancement of science.*
Royal Society of South Australia.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*
Royal Society of New South Wales.

SUR LA REPRÉSENTATION

DE LA

FORME BIQUADRATIQUE BINAIRE

PAR

J. FAIRON

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

SUR LA REPRÉSENTATION

DE LA

FORME BIQUADRATIQUE BINAIRE

Nous nous proposons de montrer que la représentation du système fondamental de la forme biquadratique binaire peut s'obtenir sur la cubique gauche par la considération de surfaces réglées du second ou du quatrième ordre dont les équations résultent des covariants du système par des substitutions fort simples.

Les surfaces du quatrième ordre que nous employons ont été signalées pour la première fois, croyons-nous, par Cayley (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 20 mai 1861) et par Chasles (*Ibidem*, 3 juin 1861). Le géomètre anglais en a fait une étude plus étendue dans ses mémoires sur les surfaces réglées (*); nous avons utilisé ses résultats. Les surfaces considérées, la huitième et la dixième espèce de Cayley, ont pour courbe nodale la cubique gauche et sont formées, la première par les bisécantes de la courbe qui rencontrent une droite fixe, la seconde par les bisécantes qui rencontrent une conique fixe.

On pourra trouver quelque analogie entre certains points du présent travail et les deux premiers numéros de notre *Note sur les involutions du quatrième ordre*, parue dans les Bulletins de

(*) Spécialement dans *A second Memoir on skew Surface, otherwise Scrolls* (Philosophical Transactions, 1864) et dans *A third Memoir*, etc. (Idem, 1869).

l'Académie royale de Belgique (Cl. des sciences, 1900, n° 12). Nous nous permettrons de renvoyer encore le lecteur à notre mémoire *Sur la représentation géométrique dans l'espace des formes quadratiques et cubiques binaires* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 1904, 3e sér., t. V), dont nous rappelons ci-après quelques formules.

1. Dans ce dernier travail, nous avons rencontré les correspondances suivantes :

$$x_1^3 : x_1^2 x_2 : x_1 x_2^2 : x_2^3 = z_1 : z_2 : z_3 : z_4, \tag{1}$$

$$x_1^2 : 2x_1 x_2 : x_2^2 = (z_1 z_3 - z_2^2) : (z_1 z_4 - z_2 z_3) : (z_2 z_4 - z_3^2). \tag{2}$$

Par la première, la forme cubique binaire égalée à zéro,

$$f_3 \equiv \alpha_x^3 \equiv \alpha_0 x_1^3 + 3\alpha_1 x_1^2 x_2 + 3\alpha_2 x_1 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 = 0,$$

se convertit en l'équation d'un plan

$$\alpha_0 z_1 + 3\alpha_1 z_2 + 3\alpha_2 z_3 + \alpha_3 z_4 = 0. \tag{3}$$

Ce plan rencontre la cubique gauche C_3, ayant pour équations deux des formules

$$z_1 z_3 - z_2^2 = 0, \qquad z_1 z_4 - z_2 z_3 = 0, \qquad z_2 z_4 - z_3^2 = 0, \tag{4}$$

ou les équations paramétriques

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1, \tag{5}$$

en trois points dont les paramètres sont racines de $f_3 = 0$. Les plans osculateurs en ces points concourent au *foyer* de ce plan, ayant pour coordonnées :

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = -\alpha_3 : \alpha_2 : -\alpha_1 : \alpha_0.$$

Par la seconde, la forme quadratique binaire égalée à zéro

$$f_2 \equiv \beta_x^2 \equiv \beta_0 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 = 0, \tag{6}$$

ou la forme polaire

$$y_1^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} = 0,$$

donne lieu à l'équation d'un hyperboloïde à une nappe

$$\beta_0(z_1 z_3 - z_2^2) + \beta_1(z_1 z_4 - z_2 z_3) + \beta_2(z_2 z_4 - z_3^2) = 0; \qquad (7)$$

c'est l'*hyperboloïde correspondant* à la forme f_2. Il peut être engendré par les intersections des éléments homologues de deux faisceaux de plans, projetant les points de $\mathcal{C}_3$ à partir des tangentes aux points de cette courbe dont les paramètres sont les racines λ et λ' de l'équation $f_2 = 0$. Cet hyperboloïde devient un cône si l'invariant $\beta_0\beta_2 - \beta_1^2$ de la forme quadratique est nul; le sommet de ce cône est le point de la cubique gauche dont le paramètre est λ, racine double de $f_2 = 0$.

Enfin les formules (1) et (6) donnent les équations

$$\beta_0 z_1 + 2\beta_1 z_2 + \beta_2 z_3 = 0, \qquad \beta_0 z_2 + 2\beta_1 z_3 + \beta_2 z_4 = 0, \qquad (8)$$

qui représentent la bisécante unissant les points de paramètres λ et λ' de $\mathcal{C}_3$. De ces dernières, on peut facilement tirer les égalités

$$\frac{z_1 z_3 - z_2^2}{\lambda\lambda'} = \frac{z_1 z_4 - z_2 z_3}{\lambda + \lambda'} = \frac{z_2 z_4 - z_3^2}{1}. \qquad (9)$$

2. Considérons actuellement la forme biquadratique binaire, f_4, que nous noterons ainsi :

$$f_4 \equiv a_x^4 \equiv a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4. \qquad (10)$$

Par les formules (2), la forme polaire, égalée à zéro,

$$y_1^2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} = 0,$$

donne l'équation

$$\left.\begin{aligned} a_0(z_1 z_3 - z_2^2)^2 + a_2(z_1 z_4 - z_2 z_3)^2 + a_4(z_2 z_4 - z_3^2)^2 \\ + 2a_1(z_1 z_3 - z_2^2)(z_1 z_4 - z_2 z_3) + 2a_2(z_1 z_3 - z_2^2)(z_2 z_4 - z_3^2) \\ + 2a_3(z_1 z_4 - z_2 z_3)(z_2 z_4 - z_3^2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Cette dernière représente une surface du quatrième ordre qui a pour ligne double la cubique gauche $\mathcal{C}_3$, correspondant aux égalités (4) ou (5). Nous l'appellerons la surface Σf_4.

A leur tour, les rapports (9) permettront d'écrire l'équation (11) ainsi :

$$\left.\begin{aligned} a_0\lambda^2\lambda'^2 + a_2(\lambda + \lambda')^2 + a_4 + 2a_1\lambda\lambda'(\lambda + \lambda') \\ + 2a_2\lambda\lambda' + 2a_3(\lambda + \lambda') = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

La surface Σf_4 est donc réglée et est formée par les bisécantes de la cubique gauche dont les paramètres vérifient la relation (12).

Cette relation prend les formes

$$\left.\begin{aligned} \lambda'^2(a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2) + 2\lambda'(a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3) \\ + (a_2\lambda^2 + 2a_3\lambda + a_4) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} a_0\lambda^2\lambda'^2 + a_2(\lambda^2 + \lambda\lambda' + \lambda'^2) + a_4 + 2a_1\lambda\lambda'(\lambda + \lambda') \\ + 3a_2\lambda\lambda' + 2a_3(\lambda + \lambda') = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

La première montre qu'à une valeur de λ correspondent, en général, deux valeurs de λ' ; par un même point de $\mathcal{C}_3$ passent donc deux génératrices rectilignes de la surface. Le plan de ces génératrices rencontre encore la surface suivant une courbe du second ordre qui s'appuie sur $\mathcal{C}_3$ en deux points dont les paramètres sont les racines λ'_1, λ'_2 de l'équation (13). La surface appartient ainsi à la dixième espèce de Cayley.

La seconde équation, qui est du premier degré par rapport aux quantités

$$p_{12} = \lambda^2\lambda'^2, \quad p_{13} = \lambda\lambda'(\lambda + \lambda'), \quad p_{14} = \lambda^2 + \lambda\lambda' + \lambda'^2,$$
$$p_{23} = \lambda\lambda', \quad p_{24} = \lambda + \lambda', \quad p_{34} = 1,$$

coordonnées tétraédriques axiales de la bisécante $(\lambda\lambda')$ à $\mathcal{C}_3$, montre que *la surface Σf_4 est formée par celles des cordes de la cubique gauche qui appartiennent à un complexe linéaire.*

En faisant $\lambda = \lambda' = \frac{x_1}{x_2}$ dans l'équation (12), ce qui correspond à rechercher quelles sont les génératrices de Σf_4 tangentes à $\mathcal{C}_3$, on trouve $a_x^4 = 0$.

Il résulte de ce qui précède, qu'*à une forme biquadratique* f_4 *on peut faire correspondre une surface réglée* Σf_4, *de la dixième espèce de Cayley, possédant quatre génératrices tangentes à la cubique gauche qui marquent, par leurs points de contact, les racines de la forme* $f_4 = 0$.

Ces génératrices constituent, avec C_3, l'intersection de Σf_4 et de la développable circonscrite à C_3, Σ_4.

— En désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les racines de $f_4 = 0$, les coordonnées tétraédriques axiales de ces tangentes sont

$$\left.\begin{array}{lll} p_{12} = \lambda_i^4, & p_{13} = 2\lambda_i^3, & p_{14} = 3\lambda_i^2 \\ p_{23} = \lambda_i^2, & p_{24} = 2\lambda_i, & p_{34} = 1; \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

de sorte que, si nous nommons $P_{12}, P_{13}, \ldots$ les coordonnées d'une des transversales communes à ces tangentes, nous aurons, pour déterminer ces transversales,

$$P_{12} - 2P_{13}\lambda_i + P_{14}\lambda_i^2 + 3P_{23}\lambda_i^2 - 2P_{24}\lambda_i^3 + P_{34}\lambda_i^4 = 0,$$
$$P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23} = 0.$$

Ces cinq équations donnent

$$P_{14}^2(a_0a_4 - 4a_1a_3) + 6P_{14}P_{23}(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 6a_2^2) + 9P_{23}^2(a_0a_4 - 4a_1a_3) = 0;$$

les deux transversales coïncident donc si les racines de cette dernière sont égales, c'est-à-dire si

$$108a_2^2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2) = 0.$$

Le dernier facteur du premier membre est précisément l'invariant I de la forme biquadratique f_4. Lorsque $I = 0$, on trouve facilement les coordonnées de cette transversale unique; ce sont :

$$\left.\begin{array}{lll} P_{12} = a_4, & P_{13} = -2a_3, & P_{14} = 3a_2, \\ P_{23} = a_2, & P_{24} = -2a_1, & P_{34} = a_0; \end{array}\right\} \qquad (15)$$

en se reportant à la relation (14), on constate alors que le complexe qu'elle représente est spécial.

Donc, *quand l'invariant* I, *de* f_4, *est nul, la surface* Σf_4 *appartient à la huitième espèce de Cayley et est formée des bisécantes à la cubique gauche qui s'appuient sur la droite fixe dont les coordonnées sont* (15).

Les racines de f_4 sont représentées alors sur C_3 par les points de contact des quatre plans tangents que l'on peut mener à la courbe par cette droite fixe. On sait que (*) ces points forment un quaterne équianharmonique.

— On peut rechercher dans quel cas la surface Σf_4 est décomposable. L'équation (11), du second degré par rapport à l'expression $z_1z_3 - z_2^2$, a pour discriminant

$$(a_0a_2 - a_1^2)(z_1z_4 - z_2z_3)^2 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)(z_1z_4 - z_2z_3)(z_2z_4 - z_3^2) + (a_0a_4 - a_2^2)(z_2z_4 - z_3^2)^2.$$

Le premier membre de cette équation sera le produit de deux facteurs de la forme (7) si ce discriminant est un carré.

On trouve ainsi la condition

$$a_0(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4) = 0, \qquad (16)$$

expression dont le second facteur est l'invariant J du système de la forme biquadratique.

Donc, *la surface* Σf_4 *se décompose en deux hyperboloïdes inscrits à la cubique gauche si l'invariant* J *du système de* f_4 *est nul.*

Dans ce cas, les génératrices de Σf_4, tangentes à la cubique gauche marquent, par leurs points de contact, une division harmonique (*). En effet, l'hyperboloïde correspondant au couple λ_1, λ_2 a pour équation

$$2(z_1z_3 - z_2^2) - (\lambda_1 + \lambda_2)(z_1z_4 - z_2z_3) + 2\lambda_1\lambda_2(z_2z_4 - z_3^2) = 0.$$

La bisécante $\lambda_3\lambda_4$ sera sur cet hyperboloïde, ou $\lambda_3\lambda_4$ formera

(*) G. Salmon, *Algèbre supérieure*, trad. de M. O. Chemin, 1890, p. 269, et R. Sturm, *Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve* (Journal de Crelle, 1879, t. LXXXVI).

un couple de l'involution quadratique ayant $\lambda_1\lambda_2$ pour points doubles, si

$$2\lambda_3\lambda_4 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + 2\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Cette condition exprime donc que les racines forment sur $\mathcal{C}_3$ une division harmonique. Elle équivaut à $J = 0$, car cet invariant peut s'écrire :

$$\begin{aligned} 72J = a_0^3[&2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + 2\lambda_3\lambda_4] \\ &+ [2\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_4 + \lambda_1) + 2\lambda_4\lambda_1] \\ &+ [2\lambda_3\lambda_1 - (\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_4) + 2\lambda_2\lambda_4]. \end{aligned}$$

3. Considérons actuellement le point de l'espace de coordonnées z_1', z_2', z_3', z_4'.

Par ce point passe une seule bisécante de $\mathcal{C}_3$; l'hyperboloïde correspondant a pour équation :

$$\left.\begin{aligned} 2(z_1z_3 - z_2^2)(z_1'z_4' - z_3'^2) - (z_1z_4 - z_2z_3)(z_1'z_4' - z_2'z_3') \\ + 2(z_2z_4 - z_3^2)(z_1'z_3' - z_2'^2) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

L'intersection de cette surface et de Σf_4 est du huitième ordre; elle se compose de la courbe double $\mathcal{C}_3$ et de deux bisécantes de celle-ci.

Nous nous proposons de *rechercher le lieu du point* z_1', z_2', z_3, z_4' *pour que ces deux droites coïncident, c'est-à-dire pour que* Σf_4 *soit l'enveloppe des hyperboloïdes représentés par l'équation* (17).

Une génératrice de cet hyperboloïde, rencontrant deux fois $\mathcal{C}_3$, a pour équations :

$$\begin{aligned} z_1(1 + \theta) - 2z_2(\mu + \theta\mu') + z_3(\mu^2 + \theta\mu'^2) = 0, \\ z_2(1 + \theta) - 2z_3(\mu + \theta\mu') + z_4(\mu^2 + \theta\mu'^2) = 0, \end{aligned}$$

μ et μ' étant les paramètres des points où cette génératrice s'appuie sur la cubique gauche. Ces équations donnent

$$\frac{z_1z_3 - z_2^2}{\mu^2 + \theta\mu'^2} = \frac{z_1z_4 - z_2z_3}{2(\mu + \theta\mu')} = \frac{z_2z_4 - z_3^2}{1 + \theta}.$$

En éliminant les numérateurs entre ces rapports et l'équation (11), on exprime que la génératrice considérée est sur la surface Σf_4. On obtient ainsi :

$$\begin{gathered}\theta^2(a_0\mu'^4 + 4a_1\mu'^3 + 6a_2\mu'^2 + 4a_3\mu' + a_4)\\ + 2\theta[a_0\mu^2\mu'^2 + 2a_1\mu\mu'(\mu+\mu') + 2a_2(\mu^2 + 4\mu\mu' + \mu'^2) + 2a_3(\mu+\mu') + a_4]\\ + (a_0\mu^4 + 4a_1\mu^3 + 6a_2\mu + 4a_3\mu + a_4) = 0.\end{gathered}$$

La surface Σf_4 sera tangente à l'hyperboloïde (17) si le discriminant de cette équation est nul. Dans ce cas, les paramètres μ, μ' de la bisécante vérifient la relation :

$$\left.\begin{gathered}4(a_0a_2 - a_1^2)\mu^2\mu'^2 + (a_0a_4 - a_2^2)(\mu + \mu')^2 + 4(a_2a_4 - a_3^2)\\ + 4(a_1a_4 - a_2a_3)(\mu + \mu')\\ + 8(a_1a_3 - a_2^2)\mu\mu' + 4(a_0a_3 - a_1a_2)\mu\mu'(\mu + \mu') = 0.\end{gathered}\right\} \quad (18)$$

Comme on a

$$\frac{z_1z_3 - z_2^2}{\mu\mu'} = \frac{z_1z_4 - z_2z_3}{\mu + \mu'} = \frac{z_2z_4 - z_3^2}{1},$$

on en conclut : *la surface* Σf_4 *est l'enveloppe de tous les hyperboloïdes correspondant aux génératrices de la surface dont l'équation est*

$$\left.\begin{gathered}4(a_0a_2 - a_1^2)(z_1z_3 - z_2^2)^2 + (a_0a_4 - a_2^2)(z_1z_4 - z_2z_3)^2\\ + 4(a_2a_4 - a_3^2)(z_2z_4 - z_3^2)^2 + 4(a_1a_4 - a_2a_3)(z_2z_4 - z_3^2)(z_1z_4 - z_2z_3)\\ + 8(a_1a_3 - a_2^2)(z_1z_3 - z_2^2)(z_2z_4 - z_3^2)\\ + 4(a_0a_3 - a_1a_2)(z_1z_4 - z_2z_3)(z_1z_3 - z_2^2) = 0.\end{gathered}\right\} \quad (19)$$

Cette surface, qui est le lieu cherché, est de même nature que la surface Σf_4.

Si l'on fait $\mu = \mu' = \frac{x_1}{x_2}$ dans la relation (18), on obtient

$$\begin{gathered}4\big[(a_0a_2 - a_1^2)x_1^4 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)x_1^3x_2 + (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2)x_1^2x_2^2\\ + 2(a_1a_4 - a_2a_3)x_1x_2^3 + (a_2a_4 - a_3^2)x_2^4\big] = 0,\end{gathered}$$

équation dont le premier membre est, à un facteur numérique près, le hessien H_4 du système de la forme f_4. Nous en concluons que *quatre génératrices de la surface* (19) *sont tangentes à* C_3 *et marquent sur cette courbe les racines du hessien de* f_4.

Nous nommerons cette nouvelle surface ΣH_4.

Un raisonnement analogue au précédent fait sur la surface ΣH_4 montre que, *réciproquement, la surface* ΣH_4 *est l'enveloppe des hyperboloïdes correspondant aux génératrices de la surface* Σf_4.

Les propriétés réciproques de Σf_4 *et* ΣH_4 *se trouvent réunies dans la développable circonscrite* Σ_4, *à* C_3; cette surface est en effet, comme on sait, le lieu des tangentes à la courbe et l'enveloppe des cônes correspondant à ces tangentes.

Aux quatre génératrices de ΣH_4 tangentes à C_3, correspondent quatre cônes enveloppés par Σf_4; ils sont les seuls. Nous avons ainsi le théorème : *les sommets des quatre cônes tangents à* Σf_4 *marquent, sur* C_3, *les racines de l'équation* $H_4 = 0$; *les sommets des quatre cônes tangents à* ΣH_4 *marquent les racines de* $f_4 = 0$.

On trouve facilement que la condition (16), appliquée à la surface ΣH_4, est $(a_0 a_2 - a_1^2)\, J^2 = 0$; donc, *si la surface* Σf_4 *se décompose en deux hyperboloïdes inscrits à* C_3, *il en est de même de la surface* ΣH_4.

En outre, l'invariant $I = (f_4, f_4)^4$ donne, appliqué à H_4, la relation $(H_4, H_4)^4 = I^2$. Donc, *les surfaces* Σf_4 *et* ΣH_4 *appartiennent simultanément à la huitième ou à la dixième espèce de Cayley.*

4. Le raisonnement suivant nous permettra encore de représenter, sur C_3, les racines de H_4 et, en outre, de construire la surface Σf_4.

Aux dérivées partielles du premier ordre de f_4 correspondent deux plans dont les foyers, A_0 et A_4, sont les points de l'espace définis par les coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = -a_3 : a_2 : -a_1 : a_0,$$
$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = -a_4 : a_3 : -a_2 : a_1.$$

Les plans passant par ces deux points rencontrent la cubique gauche en des ternes de points de l'involution cubique de premier rang, qui a pour équations :

$$a_0\lambda\mu\nu + a_1(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_2(\lambda + \mu + \nu) + a_3 = 0,$$
$$a_1\lambda\mu\nu + a_2(\lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda) + a_3(\lambda + \mu + \nu) + a_4 = 0.$$

Une des bisécantes contenues dans l'un de ces plans peut se représenter par le système

$$z_1 - z_2(\lambda + \mu) + z_3\lambda\mu = 0,$$
$$z_2 - z_3(\lambda + \mu) + z_4\lambda\mu = 0.$$

En éliminant les paramètres variables entre ces quatre relations, nous obtenons l'équation du lieu des bisécantes à C_3 s'appuyant sur la droite A_0A_4 :

$$\left.\begin{aligned}(a_0a_2 - a_1^2)(z_1z_3 - z_2^2)^2 + (a_1a_3 - a_2^2)(z_1z_4 - z_2z_3)^2 \\ + (a_2a_4 - a_3^2)(z_2z_4 - z_3^2)^2 + (a_1a_4 - a_2a_3)(z_2z_4 - z_3^2)(z_1z_4 - z_2z_3) \\ + (a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2)(z_2z_4 - z_3^2)(z_1z_3 - z_2^2) \\ + (a_0a_3 - a_1a_2)(z_1z_4 - z_2z_3)(z_1z_3 - z_2^2) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Ce lieu est, évidemment, une surface appartenant à la huitième espèce de Cayley.

Dans l'équation (20), faisons la substitution marquée par les formules (9) ; nous obtenons la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres des points d'intersection des bisécantes pour que ces droites soient génératrices de la nouvelle surface. Faisons ensuite, dans le résultat, $\lambda = \lambda' = \frac{x_1}{x_2}$; nous trouvons l'équation $H_4 = 0$. La nouvelle surface, que nous nommerons $\Sigma' H_4$, jouit donc de la propriété que *ses génératrices, tangentes à* C_3, *marquent aussi, sur cette courbe, les racines du hessien de* f_4.

Les plans passant par A_0A_4 et ces quatre tangentes sont tangents à C_3. Donc, *les racines du hessien de* f_4 *sont marquées sur* C_3 *par les points de contact des quatre plans tangents qu'on peut mener à la cubique gauche par la droite joignant les foyers des plans correspondant aux dérivées premières de* f_4.

L'équation précédente peut s'écrire

$$\Sigma H_4 + I\Sigma_4 = 0, \quad (21)$$

ΣH_4 et Σ_4 désignant ici les premiers membres de l'équation (19) et de

$$(z_1z_4 - z_2z_3)^2 - 4(z_1z_3 - z_2^2)(z_2z_4 - z_3^2) = 0 \quad (22)$$

qui représente la développable circonscrite à C_3.

La relation (21) montre que $\Sigma' H_4$, ΣH_4, Σ_4 *se coupent suivant les quatre mêmes tangentes à* C_3*; en outre, lorsque* $I = 0$, *les surfaces* ΣH_4 *et* $\Sigma' H_4$ *sont identiques; les quatre tangentes ont une transversale unique* A_0A_4. Les coordonnées de celle-ci sont

$$p_{12} = a_2a_4 - a_3^2, \quad p_{13} = a_2a_3 - a_1a_4, \quad p_{14} = a_0a_4 - a_1a_3,$$
$$p_{23} = a_1a_3 - a_2^2, \quad p_{24} = a_1a_2 - a_0a_3, \quad p_{34} = a_0a_2 - a_1^2.$$

5. Reprenons actuellement l'équation (13). Les génératrices de Σf_4, issues du point de paramètre λ de C_3, se confondent lorsque l'on a

$$(a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3)^2 - (a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2)(a_2\lambda^2 + 2a_3\lambda + a_4) = 0,$$

condition qui est $H_4 = 0$. Il y a donc ainsi quatre génératrices *singulières* sur Σf_4, qui correspondent aux droites de contact de Σf_4 avec les quatre cônes tangents dont il a été parlé ci-dessus. D'ailleurs, si $\lambda_1' \equiv \lambda_2'$, le plan unissant les points de paramètres $(\lambda, \lambda_1', \lambda_2')$ devient tangent à Σf_4 suivant toute la génératrice de contact et est tangent, à la cubique gauche, au point λ (*) :

Les génératrices singulières de Σf_4 *font partie de l'intersection de cette surface et de* ΣH_4*; elles marquent, sur* C_3, *les racines de* H_4. *Les plans tangents, menés à la cubique gauche par la droite* A_0A_4, *sont tangents à* Σf_4 *suivant les bisécantes de* C_3 *déterminées par ces plans.*

Il résulte de là une construction simple des surfaces Σf_4 et ΣH_4 dans le cas général :

Étant donnée la forme a_x^4, *on pourra toujours marquer dans l'espace les points* A_0, A_4. *Les quatre plans tangents, menés à* C_3 *par la droite* A_0A_4, *déterminent, par leurs points de contact, les sommets de quatre cônes inscrits à* C_3 *et, par leurs intersections avec la cubique, quatre bisécantes. La surface* Σf_4 *est déterminée par les huit conditions d'être tangente à ces cônes suivant ces génératrices.*

(*) J. Plücker, *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction* (Annali di matematica, 1867, 2e sér., t. I).

Si l'on a déterminé les génératrices de Σf_4 tangentes à $\mathcal{C}_3$, les plans tangents à $\mathcal{C}_3$ menés par ces droites établissent huit conditions pour construire ΣH_4.

6. Dans le cas où $I = 0$, nous savons que les surfaces ΣH_4 et $\Sigma' H_4$ se ramènent l'une à l'autre; la surface Σf_4 a pour droite directrice AA', ayant pour coordonnées les expressions (15); la surface ΣH_4 a pour droite directrice A_0A_4.

Mais Σf_4 rencontre ΣH_4 suivant quatre génératrices singulières de Σf_4 qui s'appuient sur A_0A_4; ΣH_4 se trouve dans les mêmes conditions relativement à Σf_4 et AA'. Ces huit génératrices coïncident en quatre droites uniques, autrement l'intersection des surfaces Σf_4 et ΣH_4 serait d'un ordre plus élevé que le seizième.

Nous en concluons que, *si* $I = 0$, *les génératrices communes aux surfaces* Σf_4, ΣH_4 *sont les quatre bisécantes qui s'appuient simultanément sur les droites* A_0A_4 *et* AA'. *Les plans tangents à la cubique gauche, menés par l'une de ces transversales, marquent sur cette courbe, par leurs points de contact, les racines de* a_x^4 *ou de* H_4 *et, par leurs points d'intersection, les racines de* H_4 *ou de* a_x^4.

Étant donnée A_0A_4, on obtient facilement AA' et les racines de a_x^4.

— La bisécante menée par le point A_0, à $\mathcal{C}_3$, a pour équations :

$$z_1(a_0a_2 - a_1^2) + z_2(a_0a_3 - a_1a_2) + z_3(a_1a_3 - a_2^2) = 0,$$
$$z_2(a_0a_2 - a_1^2) + z_3(a_0a_3 - a_1a_2) + z_4(a_1a_3 - a_2^2) = 0;$$

la condition pour que le point A_4 $(-a_4, a_3, -a_2, a_1)$ appartienne à cette droite est $J = 0$. La surface $\Sigma' H_4$ étant formée des bisécantes à $\mathcal{C}_3$ qui s'appuient sur A_0A_4, on en conclut :

Lorsque $J = 0$, *la surface* ΣH_4 *est formée de deux cônes du second ordre inscrits à la cubique gauche et qui se coupent selon la bisécante* A_0A_4; *les hyperboloïdes qui constituent la surface* Σf_4 *ont pour génératrice commune* A_0A_4 *et sont tangents aux deux cônes considérés; les racines de* H_4 *sont égales par couples.*

Les hyperboloïdes formant la surface ΣH_4 *se coupent suivant la bisécante à* $\mathcal{C}_3$ *qui marque, sur cette courbe, les couples de*

racines égales de $H_4 = 0$. *Enfin, les racines des hessiens des deux formes* $\frac{\partial f_4}{\partial x_1}$ *et* $\frac{\partial f_4}{\partial x_2}$ *sont égales.*

7. Nous savons qu'à un point de paramètre λ, pris sur C_3, correspondent deux génératrices $\lambda\lambda'_1$, $\lambda\lambda'_2$ de la surface Σf_4. En écrivant que le plan qui passe par la bisécante $\lambda'_1\lambda'_2$ passe aussi par le point λ, on obtient l'équation d'un plan, que nous appelons *plan du point* λ, rencontrant Σf_4 suivant les deux génératrices considérées et une conique qui s'appuie sur la cubique gauche aux points $\lambda'_1\lambda'_2$ où elle est tangente aux droites $\lambda\lambda'_1$, $\lambda\lambda'_2$.

Cette équation est

$$\left.\begin{aligned} &z_1(a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2) - z_2(a_0\lambda^3 - 3a_2\lambda - 2a_3) \\ &+ z_3(a_4 - 3a_2\lambda^2 - 2a_1\lambda^3) - z_4(a_2\lambda^3 + 2a_3\lambda^2 + a_4\lambda) = 0; \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

de sorte que le foyer Λ du plan du point λ a pour coordonnées :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{z_1}{3(a_2\lambda^3 + 2a_3\lambda^2 + a_4\lambda)} = \frac{z_2}{a_4 - 3a_2\lambda^2 - 2a_1\lambda^3} \\ &= \frac{z_3}{a_0\lambda^3 - 3a_2\lambda - 2a_3} = \frac{z_4}{3(a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_3)}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Ce foyer se trouve dans le plan osculateur à la courbe cubique au point de paramètre λ. Mais les plans des points λ'_1 et λ'_2 ont aussi leur foyer dans ce plan osculateur qui rencontre ainsi trois fois le lieu du foyer Λ; ce lieu est donc une cubique gauche dont les équations paramétriques sont les formules (24). Nous nommerons cette nouvelle cubique C'_3.

— *La cubique* C'_3 *est la courbe double de la surface réciproque de* Σf_4.

Remarquons, en effet, que le plan osculateur à C_3, au point λ, renferme les foyers Λ et Λ'_1 des plans des points λ et λ'_1 de C_3, lesquels sont sur C'_3 à la rencontre de cette courbe et des plans osculateurs aux points λ et λ'_1. A la bisécante $\lambda\lambda'_1$ de C_3 correspond donc la bisécante $\Lambda\Lambda'_1$ de C'_3. Le plan osculateur λ est le plan du point Λ de la courbe C'_3; celle-ci est donc la courbe double de la surface réciproque de Σf_4, qui est de même nature que Σf_4.

Les équations (24), résolues par rapport à $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$, donnent, après suppression du facteur I, les expressions

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda^3}{3(a_2z_1 + 2a_3z_2 + a_4z_3)} &= \frac{\lambda^2}{a_4z_4 - 3a_2z_2 - 2a_1z_1} \\ = \frac{\lambda}{a_0z_1 - 3a_2z_3 - 2a_3z_4} &= \frac{1}{3(a_0z_2 + 2a_1z_3 + a_2z_4)}, \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

dans lesquelles z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{C}_3'$.

A tout point de la bisécante $\lambda\lambda_1'$, de coordonnées $\lambda^3 + \theta\lambda_1'^3$, $\lambda^2 + \theta\lambda_1'^2$, $\lambda + \theta\lambda_1'$, $1 + \theta$, correspond un point de la bisécante $\Lambda\Lambda_1'$ de la courbe $\mathcal{C}_3'$, ayant pour coordonnées $\Lambda^3 + \theta\Lambda_1'^3$, $\Lambda^2 + \theta\Lambda_1'^2$, $\Lambda + \theta\Lambda_1'$, $1 + \theta$. Nous aurons donc l'équation de la surface réciproque de Σf_4 en remplaçant, dans l'équation (11), z_1, z_2, z_3, z_4 respectivement par les dénominateurs des rapports (25).

Cette équation, trop longue pour être transcrite ici (elle a trente-cinq termes), est du cinquième degré par rapport aux coefficients littéraux de a_x^4, mais elle renferme à tous les termes le facteur $I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$.

— Si, dans cette équation, on fait la substitution marquée par les formules (1), on trouve

$$[a_x^4]^3 = 0.$$

Il en résulte que les quatre génératrices de la surface réciproque, qui sont tangentes à sa ligne double, sont aussi les quatre génératrices de Σf_4 tangentes à $\mathcal{C}_3$. Donc, $\mathcal{C}_3$ *et* $\mathcal{C}_3'$ *ont quatre tangentes communes marquant sur* $\mathcal{C}_3$ *les racines de* $f_4 = 0$.

Ce résultat peut s'obtenir de plusieurs autres manières; en particulier, en considérant les équations de la tangente au point A de $\mathcal{C}_3'$; ce sont deux des formules

$$\begin{aligned}
a_\lambda^4(\quad a_2z_1 + 2a_3z_2 + a_4z_3 \quad) - I\lambda^2(\ z_1 - 2z_2\lambda + z_3\lambda^2 \quad) &= 0, \\
a_\lambda^4(-2a_1z_1 - 3a_2z_2 + a_4z_4) - I\lambda\,(2z_1 - 3z_2\lambda + z_4\lambda^3) &= 0, \\
a_\lambda^4(\quad a_0z_1 - 3a_2z_3 - 2a_3z_4) - I\ (\ z_1 - 3z_3\lambda^2 + 2z_4\lambda^3) &= 0, \\
a_\lambda^4(\quad a_0z_2 + 2a_1z_3 + a_2z_4) - I\ (\quad z_2 - 2z_3\lambda + z_4\lambda^2) &= 0,
\end{aligned}$$

où a_λ^4 représente la fonction $a_0\lambda^4 + 4a_1\lambda^3 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda + a_4$. On voit que, dans les hypothèses $a_\lambda^4 = 0$ et I différent de zéro, ces équations se ramènent à celles de la tangente à $\mathcal{C}_3$.

On pourrait démontrer encore que *les valeurs de* λ, *racines de* $H_4 = 0$, *qui donnent naissance aux génératrices singulières de* Σf_4, *donnent aussi les génératrices singulières de la réciproque.*

Les multiplicateurs de a_λ^4, dans les expressions qui précèdent, ont une signification remarquable. Égalés à zéro, ils représentent quatre plans passant par les sommets du tétraèdre de référence et la droite dont les coordonnées sont les expressions (15), l'invariant quadratique étant nul. En outre, le premier et le dernier de ces plans sont les premières polaires des points A_4 et A_0 par rapport à la surface Σf_4.

8. Appelons $P_0 = 0$, $P_4 = 0$ les équations des plans correspondant aux dérivées premières $\frac{\partial f_4}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_4}{\partial x_2}$ de f_4 ; ces plans ont A_0 et A_4 pour foyers. Le plan $P_0 - \theta P_4 = 0$, qui passe par l'intersection de ces plans, a pour foyer le point de coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = -(a_3 - \theta a_4) : (a_2 - \theta a_3) : -(a_1 - \theta a_2) : (a_0 - \theta a_1).$$

Ainsi qu'il résulte d'une propriété de la cubique gauche, ce foyer est sur la droite A_0A_4, de sorte que θ est le paramètre d'un point de cette droite.

De même, appelons $P'_0 = 0$, $P'_4 = 0$ les équations des plans ayant respectivement pour foyer les points A'_0, A'_4 de coordonnées

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 : z_3 : z_4 &= -3(a_1a_4 - a_2a_3) : (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2) \\ &: -3(a_0a_3 - a_1a_2) : 6(a_0a_2 - a_1^2), \\ z_1 : z_2 : z_3 : z_4 &= -6(a_2a_4 - a_3^2) : 3(a_1a_4 - a_2a_3) \\ &: -(a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2) : 3(a_0a_3 - a_1a_2), \end{aligned}$$

et correspondant aux dérivées premières du hessien H_4. Le plan $P'_0 - \theta P'_4 = 0$ a son foyer au point de paramètre θ de $A'_0A'_4$ (*).

(*) La condition pour qu'une tangente à C_3 s'appuie sur la droite $A'_0A'_4$ prend la forme remarquable suivante

$$J \cdot f_4 - I \cdot H_4 = 0,$$

où $\frac{x_1}{x_2}$ est le paramètre du point de contact; cette expression renferme toutes les fonctions invariantes du système fondamental de f_4; sauf le covariant du sixième ordre.

L'élimination de θ entre les équations de plans qui le renferment donne

$$P_0P'_4 - P_4P'_0 = 0.$$

Cette équation représente une quadrique réglée. Développée, elle peut s'écrire

$$z_1^2(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3) + z_1z_2(a_0^2a_4 + 2a_0a_1a_3 - 9a_0a_2^2 + 6a_1^2a_2)$$
$$+ (2z_1z_3 + 3z_2^2)(a_0a_1a_4 - 3a_0a_2a_3 + 2a_1^2a_3) + (z_1z_4 + 9z_2z_3)(a_1^2a_4 - a_0a_3^2)$$
$$- (2z_2z_4 + 3z_3^2)(a_0a_3a_4 - 3a_1a_2a_4 + 3a_1a_3^2)$$
$$- z_3z_4(a_0a_4^2 + 2a_1a_3a_4 - 9a_2^2a_4 + 6a_2a_3^2) - z_4^2(a_1a_4^2 - 3a_2a_3a_4 + 2a_3^3) = 0.$$

Nous désignons par $T \equiv (f_4, H_4)^1$, le covariant du sixième ordre de la forme f_4. L'équation précédente peut se déduire de la forme polaire

$$y_1^3\frac{\partial^3 T}{dx_1^3} + 3y_1^2y_2\frac{\partial^3 T}{\partial x_1^2\partial x_2} + 3y_1y_2^2\frac{\partial^3 T}{\partial x_1\partial x_2^2} + y_2^3\frac{\partial^3 T}{\partial x_2^3} = 0,$$

au moyen de la correspondance marquée par les formules (1). Nous appellerons donc la nouvelle surface ΣT.

La substitution (5), faite dans l'équation de ΣT, permet d'énoncer le théorème : *la surface quadrique* ΣT *coupe la cubique gauche* C_3 *en six points dont les paramètres sont racines du covariant* T *du système de* f_4.

La droite qui joint les points de paramètre θ des droites A_0A_4 et $A'_0A'_4$ engendre une quadrique, *réciproque* de ΣT.

Lorsque $I = 0$, l'intersection des plans P_0 et P_4 coïncide avec la jonction de leurs foyers; car $I = 0$ indique que les points racines de $\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0$ forment un terne de points de l'involution cubique ayant pour points triples les racines de la forme $\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = 0$, et réciproquement. Dans ce cas, la surface ΣT coïncide avec sa réciproque.

Lorsque $J = 0$, les deux droites A_0A_4 et $A'_0A'_4$ se rencontrent; il en est de même de leurs droites réciproques, axes des faisceaux de plans $P_0 - \theta P_4 = 0$, $P'_0 - \theta P'_4 = 0$. Les intersections des plans correspondants des deux faisceaux donnent donc, pour

ΣT, un cône du second ordre; dans ce cas, la réciproque de ΣT est le plan des droites A_0A_4, $A'_0A'_4$. Le foyer de ce plan est le sommet du cône.

9. Les surfaces ΣT, Σf_4, ΣH_4 sont reliées entre elles par certaines propriétés qui permettent de les déduire les unes des autres.

Considérons le point λ, de paramètre λ, de C_3; soit Λ son correspondant sur C'_3; Λ est le foyer du plan du point λ dans la surface Σf_4 (n° 7). La droite $\lambda\Lambda$ est marquée, dans ce plan, par le plan osculateur en λ à la cubique gauche C_3.

Un point quelconque de la droite $\lambda\Lambda$ a pour coordonnées :

$$\frac{z_1}{3(a_2\lambda^3 + 2a_3\lambda^2 + a_4\lambda) + \theta\lambda^3} = \frac{z_2}{(a_4 - 3a_2\lambda^2 - 2a_1\lambda^3) + \theta\lambda^2}$$

$$= \frac{z_3}{(a_0\lambda^3 - 3a_2\lambda - 2a_3) + \theta\lambda} = \frac{z_4}{3(a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2) + \theta}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de ΣT, on obtient

$$\theta^2 T - 3IT = 0, \qquad (26)$$

dans laquelle le terme du premier degré est disparu comme ayant un coefficient identiquement nul, I a la signification bien connue et T est le covariant du sixième ordre où l'on a fait

$$\frac{x_1}{x_2} = \lambda.$$

L'équation (26) donne le paramètre θ des points d'intersection de la droite $\lambda\Lambda$ et de la surface ΣT.

Nous en concluons d'abord que *si λ est racine de $T = 0$*, les valeurs de θ sont indéterminées et *la droite $\lambda\Lambda$ est une génératrice de ΣT*; *les points Λ, correspondants des points racines de $T = 0$, sont les intersections de ΣT et de C'_3*; *les plans des points λ considérés sont tangents à la quadrique.* On peut voir que les points de contact sont sur C'_3

Après suppression du facteur T, l'équation ci-dessus donne

$$\theta = \pm\sqrt{3I},$$

expression réelle quand l'invariant I est positif. Cette dernière égalité nous permet d'énoncer la propriété curieuse : *la surface* ΣT *divise harmoniquement les segments tels que* $\lambda\Lambda$, *compris sur les droites joignant les points correspondants de* C_3 *et de* C_3'.

Les propriétés précédentes permettent de construire la quadrique ΣT quand on connaît Σf_4.

En reprenant les mêmes calculs sur les surfaces ΣT et ΣH_4 (à laquelle correspond une nouvelle cubique gauche, C_3'', ligne nodale de la surface réciproque de ΣH_4), on arrive à l'équation

$$\theta^2 T - 3I^2 T = 0.$$

Celle-ci donne lieu à des conclusions analogues à celles qui précèdent.

Nous voyons donc que *les droites joignant les points racines de* $T = 0$ *aux points correspondants des cubiques gauches* C_3' *et* C_3'' *sont des génératrices de* ΣT. Ces génératrices sont dans le plan osculateur à la courbe C_3; donc, *le plan osculateur à* C_3 *en un point racine du covariant* T *est tangent, en ce point, à la quadrique* ΣT.

— La remarque suivante indique une relation directe entre les racines de f_4 et la surface ΣT.

On sait que (*) le covariant T ne diffère que par un facteur numérique du produit de trois formes quadratiques. L'une d'elles a pour expression

$$\left.\begin{aligned} x_1^2[(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_3 + \lambda_4)] - 2x_1x_2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_4) \\ + x_2^2[\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_1 + \lambda_2)]. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

(*) G. Salmon, *Algèbre supérieure*, p. 275.

On obtient facilement la bisécante et l'hyperboloïde inscrit à la cubique gauche qui correspondent à cette forme, laquelle est le jacobien des formes

$$\left.\begin{aligned} &2x_1^2 - x_1x_2(\lambda_1 + \lambda_2) + 2x_2^2\lambda_1\lambda_2, \\ &2x_1 - x_1x_2(\lambda_3 + \lambda_4) + 2x_2^2\lambda_3\lambda_4. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

La bisécante est la droite d'intersection des hyperboloïdes relatifs à ces dernières; l'hyperboloïde est engendré par l'intersection des plans homologues de deux faisceaux projetant les points de $\mathcal{C}_3$ à partir des bisécantes relatives aux formes (28).

Nous avons rappelé, dans notre premier numéro, le procédé consistant à obtenir le même hyperboloïde par deux faisceaux de plans ayant pour axes les tangentes à $\mathcal{C}_3$ aux points racines de la forme (27). De là résulte que les plans osculateurs à $\mathcal{C}_3$ en ces points sont tangents à l'hyperboloïde; mais les racines de l'expression (27) égalée à zéro sont racines de $T = 0$; donc, *les trois hyperboloïdes correspondant aux formes* (27) *sont tangents, aux points racines de* $T = 0$, à la surface ΣT.

— Les points Λ de $\mathcal{C}_3'$, correspondant aux racines λ de T sur $\mathcal{C}_3$, jouissent de propriétés analogues aux précédentes par rapport à la surface ΣT et à la réciproque de Σf_4.

— Lorsque $I = 0$, les deux racines θ de l'équation (26) sont nulles. Les droites $\lambda\Lambda$ sont tangentes à ΣT et les foyers des plans des points λ se trouvent tous sur ΣT. Mais, lorsque $I = 0$, tous ces plans passent par la droite dont les coordonnées sont les expressions (15); leurs foyers appartiennent donc à une seconde droite. Nous concluons de là que, *si* $I = 0$, *les formules* (24) *définissent une droite génératrice de* ΣT, *le long de laquelle les droites* $\lambda\Lambda$ *sont tangentes à cette surface.*

10. La surface ΣT peut donner naissance à certaines surfaces analogues à Σf_4 ; en voici un exemple.

Posons pour abréger :

$$A_0 = 3[5a_0^2a_3^2 - 14a_0a_1a_2a_3 + 8a_1^3a_3 - a_0^2a_2a_4 + 9a_0a_2^3 - 6a_1^2a_2^2 + a_0a_1^2a_4),$$

$$A_1 = 3[a_0^2a_3a_4 - 4a_0a_1a_2a_4 + 5a_1^3a_4 + 5a_0a_2^2a_3 - 2a_1^2a_2a_3 - a_0a_1a_3^2),$$

$$A_2 = a_0^2a_4^2 - 2a_0a_1a_3a_4 - 8a_1^2a_3^2 - 9a_0a_2^2a_4 + 9a_1^2a_2a_4 + 9a_0a_2a_3^2,$$

$$A_3 = 5[a_0a_1a_4^2 - 4a_0a_2a_3a_4 + 3a_0a_3^3 + 5a_1a_2^2a_4 - 2a_1a_2a_3^2 - a_1^2a_3a_4],$$

$$A_4 = 5[5a_1^2a_4^2 - 14a_1a_2a_3a_4 + 8a_1a_3^3 - a_0a_2a_4^2 + 9a_2^3a_4 - 6a_2^2a_3^2 + a_0a_3^2a_4].$$

Le plan polaire du point A [ayant pour coordonnées les expressions (24)] de la cubique C_3', par rapport à la quadrique ΣT, a pour équation

$$z_1[A_0\lambda^2 + 2A_1\lambda + A_2] - z_2[A_0\lambda^3 - 3A_2\lambda - 2A_3]$$
$$+ z_3[A_4 - 3A_2\lambda^2 - 2A_1\lambda^3) - z_4[A_2\lambda^3 + 2A_3\lambda^2 + A_4\lambda] = 0.$$

Remarquons d'abord qu'il passe par le point λ de C_3, résultat indiqué déjà par la propriété de ΣT de diviser harmoniquement la droite λA.

Cette équation, comparée à l'équation (23), montre que ce plan est le plan du point λ d'une surface ΣF_4 correspondant à la forme biquadratique

$$A_x^4 \equiv A_0x_1^4 + 4A_1x_1^3x_2 + 6A_2x_1^2x_2^2 + 4A_3x_1x_2^3 + A_4x_2^4.$$

Nous pourrons donc marquer sur C_3 les racines de cette forme, laquelle peut s'écrire de la manière suivante :

$$A_x^4 \equiv 3I \cdot H_4 - (H_4, H_4)^2.$$

11. Un certain nombre des propriétés précédentes des surfaces de Cayley, que nous croyons nouvelles, peuvent être facilement généralisées ; il en est de même des propriétés relatives des surfaces Σf_4, ΣH_4, $\Sigma' H_4$, ΣT.

Prenant, comme départ, l'équation de la première sous la forme

$$a(z_1z_3 - z_2^2)^2 + 3b(z_1z_4 - z_2z_3)^2 + c(z_2z_4 - z_3^2)^2$$
$$+ 2f(z_1z_3 - z_2^2)(z_1z_4 - z_2z_3) + 6g(z_1z_3 - z_2^2)(z_2z_4 - z_3^2)$$
$$+ 2h(z_1z_4 - z_2z_3)(z_2z_4 - z_3^2) = 0,$$

on voit que la biquadratique correspondante est

$$ax_1^4 + 4fx_1^3x_2 + 6(2b + g)x_1^2x_2^2 + 4hx_1x_2^3 + cx_2^4 = 0$$

Il suffit donc, dans la plupart des raisonnements ci-dessus, de poser

$$a_0 = a, \qquad a_1 = f, \qquad a_2 = 2b + g, \qquad a_3 = h, \qquad a_4 = c.$$

SUR

LES POINTS SINGULIERS

DES

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

PAR

M. STUYVAERT

(GAND)

SUR

LES POINTS SINGULIERS

DES

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

J'ai lu, avec le plus grand intérêt, la notice consacrée par M. J. Neuberg aux courbes décrites par le nouvel instrument de M. V. Lebeau (*). Quelques-unes de ces lignes m'ont fait songer à une méthode générale qui m'occupe depuis quelque temps et qui m'a donné jusqu'ici beaucoup de résultats pour la géométrie de l'espace.

J'ai déjà utilisé cette méthode ou du moins j'y ai fait allusion dans une note présentée à l'Académie royale de Belgique (**) et dans une thèse annexée à ma dissertation (***). De plus, j'ai consigné, dans un pli déposé aux archives de l'Académie, les résultats que j'ai obtenus jusqu'à présent et que je me propose de développer dans un travail d'ensemble.

Mais je n'avais guère pensé aux applications de géométrie

(*) J. Neuberg, *Sur les lignes tracées par le curvigraphe V. Lebeau.* (Mém. de la Soc. roy. des sciences de Liége, 1904, 3e sér., t. V.)

(**) M. Stuyvaert, *Sur les plans qui coupent, en six points d'une conique, un système de lignes de l'espace.* (Mém. in-8o de l'Acad. roy. de Belgique, 1902.)

(***) Idem, *Études de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre.* Gand, Hoste, 1902.

plane. Dans les lignes qui vont suivre, j'exposerai la méthode et je l'utiliserai pour des questions contenues dans le travail de M. Neuberg.

1. Considérons deux courbes algébriques planes représentées par les équations

$$F(x, y; \alpha) = 0, \qquad f(x, y; \alpha) = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions entières d'un même paramètre α.

En éliminant α, on a l'équation du lieu décrit par les intersections de ces courbes.

Or, qu'est-ce que *éliminer* α? En géométrie analytique, éliminer α, c'est écrire la condition pour que les équations $F = 0$ et $f = 0$ admettent *une* même valeur de α (au moins).

En algèbre, le mot élimination a un sens plus étendu : il comprend, en outre, la recherche des conditions pour que les deux équations soient vérifiées par *deux ou plusieurs* valeurs communes de α. Pour autant qu'il n'y ait qu'un seul paramètre à éliminer, entre deux équations seulement, le problème est complètement connu; il a fait l'objet d'un travail définitif de M. P. Mansion (*). Les conditions de l'existence de deux ou plusieurs racines communes en α s'expriment par l'évanouissement d'un déterminant rectangulaire (ou matrice) ayant plus de colonnes que de lignes.

Il convient d'interpréter géométriquement ces recherches plus profondes de l'algèbre.

2. Pour fixer les idées, je suppose que les équations aient la forme

$$F \equiv a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e = 0,$$

$$f \equiv g\alpha^3 + h\alpha^2 + k\alpha + l = 0,$$

et que $a, b, c, \ldots, k, l$ soient des polynomes en x et y. Les con-

(*) P. Mansion, *Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques au moyen des déterminants*. Paris, Gauthier-Villars, 1884.

ditions de l'existence de *deux* racines communes en α (au moins) s'écrivent

$$M \equiv \begin{Vmatrix} & a & b & c & d & e \\ a & b & c & d & e & \\ g & h & k & l & & \\ & g & h & k & l & \\ & & g & h & k & l \end{Vmatrix} = 0.$$

Cette notation signifie que les six déterminants formés en prenant cinq des six colonnes du tableau sont tous nuls.

Si deux de ces déterminants sont nuls, par exemple ceux qui sont formés des colonnes (1, 2, 3, 4, 5) et (1, 2, 3, 4, 6), il existe une même relation linéaire entre les éléments d'une colonne quelconque du tableau M, et alors les déterminants à cinq colonnes de ce tableau sont nuls; ou bien, il existe plus d'une relation linéaire entre les éléments des colonnes (1, 2, 3, 4), et alors on a

$$m \equiv \begin{Vmatrix} & a & g & & \\ a & b & h & g & \\ b & c & k & h & g \\ c & d & l & k & h \end{Vmatrix} = 0.$$

Ainsi la notation $M = 0$ désigne, en général, un nombre fini de points, savoir les points communs aux courbes représentées par l'évanouissement des déterminants (1, 2, 3, 4, 5) et (1, 2, 3, 4, 6), d'où il faut défalquer les points qui annulent le tableau m. Ceux-ci se trouvent d'une manière analogue et l'on a ainsi une méthode récurrente aboutissant à un terme de la forme

$$\| A \quad B \| = 0,$$

et celui-ci représente tous les points communs aux courbes $A = 0$, $B = 0$.

Rien donc de plus facile, en théorie, que de déterminer le nombre et l'emplacement des points représentés par $M = 0$. La

méthode peut même présenter quelques avantages secondaires : on a le choix des deux déterminants à prendre dans le tableau M ; en le faisant avec discernement, on simplifie plus ou moins le procédé ; en variant le choix et en comparant les résultats, on découvrira peut-être quelque propriété des figures considérées.

3. Je reprends les équations

$$F \equiv a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e = 0,$$
$$f \equiv g\alpha^3 + h\alpha^2 + k\alpha + l = 0.$$

Elles représentent les *génératrices d'un lieu*, si $a, b, \ldots, g, h, \ldots$ sont des fonctions de x et y. Il est presque évident que les valeurs de x et y, pour lesquelles $F = 0$ et $f = 0$ admettent deux solutions communes en α, définissent des *points singuliers* (en général *points doubles*) de ce lieu.

En effet, supposons que, pour $x = y = 0$ par exemple, les équations soient vérifiées par deux mêmes valeurs de α. Remplaçons y par mx ; les équations prennent la forme

$$F_1(x, \alpha) = 0, \qquad f_1(x, \alpha) = 0.$$

On en tire μ valeurs de x répondant aux points de rencontre du lieu avec la droite $y = mx$, et μ valeurs correspondantes de α. Par hypothèse, deux de ces valeurs de α répondent à la valeur $x = 0$; donc, quel que soit m, la droite $y = mx$ ne rencontre plus le lieu qu'en $\mu - 2$ points autres que l'origine, laquelle est un point double.

La réciproque peut présenter deux exceptions. Si l'origine est un point double, la droite $y = mx$ ne rencontre le lieu qu'en $\mu - 2$ autres points, quelle que soit la valeur de m. Les équations de tantôt, $F_1(x, \alpha) = 0$, $f_1(x, \alpha) = 0$, peuvent être considérées comme les équations de deux courbes rapportées à des axes α et x ; parmi les μ intersections de ces courbes, il doit y en avoir deux sur l'axe des x ; *ou bien, et voici les exceptions,* 1° elles ont un point commun sur l'axe des x et même tangente en ce point, quel que soit m ; 2° une de leurs intersections, sur l'axe des x, est un point double de l'une des courbes et un point

simple de l'autre. Dans ce dernier cas, pour $x = y = 0$, l'une des équations primitives, $F = 0$ par exemple, admet une racine double α_1, et l'autre $f = 0$ a pour racine simple α_1.

Ce sont bien là des cas exceptionnels, car : 1° pour avoir un point commun sur l'axe des x et même tangente en ce point, *quel que soit* m, il faut que les polynomes F_1 et f_1 satisfassent à trois conditions, généralement incompatibles, puisqu'on ne dispose que de deux variables x et α; 2° il ne suffit pas qu'une valeur de α soit racine double de $F = 0$ et simple de $f = 0$; cette circonstance ne donne un point double du lieu que si la courbe $F_1(x, \alpha) = 0$ présente un nœud pour toute valeur de m, ce qui exige de nouveau plus de deux conditions.

Au reste, ceci sera démontré plus loin d'une autre manière.

En général, $M = 0$ donne tous les points singuliers du lieu.

Le principe établi ci-dessus conduit à deux séries de conséquences.

Dans les questions *générales*, où $a, b, c, \ldots$ représentent des formes ternaires indépendantes l'une de l'autre et les plus générales d'un ordre donné, on cherche le *nombre* des points singuliers et, par suite, le genre du lieu géométrique. Je traiterai ce problème à la fin de cette étude.

Dans les questions *spéciales*, où les coefficients des formes $a, b, c, \ldots$ sont des nombres ou des fonctions entre lesquelles il existe des relations constantes, on peut trouver l'*emplacement* des points singuliers du lieu. Sans doute, il y a d'autres procédés pour trouver ces points : par exemple, on cherchera l'équation du lieu, puis les premières polaires de trois points non en ligne droite et enfin les points communs à ces trois courbes. La méthode actuelle a toutefois l'avantage de ne pas exiger la connaissance de l'équation du lieu et d'utiliser des courbes d'un ordre moindre que dans l'autre procédé.

4. Il faut que j'examine encore quelques cas particuliers qui peuvent se présenter.

D'abord, si les groupes de points représentés par l'évanouissement des tableaux M et m ont un point commun, on pourrait

craindre que ce point, ayant été défalqué comme annulant m, ne soit perdu dans l'énumération.

Soient ν et ν' les ordres respectifs des courbes (1, 2, 3, 4, 5) et (1, 2, 3, 4, 6); elles ont généralement $\nu\nu'$ points communs, dont les uns A, B, C, ... annulent le tableau m (1, 2, 3, 4) et les autres A′, B′, C′, ... le tableau M. Si un point A coïncide avec un point A′, les courbes n'ont, en dehors de ce point, que $\nu\nu' - 2$ intersections; donc, ou bien A est double pour l'une des courbes, ou bien celles-ci se touchent en A. De toute façon, ce point compte double sur l'intersection des deux courbes et, si on le défalque une fois parce qu'il annule m, il reste compté parmi les points qui annulent M; donc, quand on cherche seulement le *nombre* des points M, la circonstance examinée ici n'est pas une source d'erreur. Mais, si l'on cherche l'*emplacement* des points singuliers, un point déterminé ne peut être écarté du groupe M par le fait seul qu'il annule m. Il faut, avant de le rejeter définitivement, voir si, par hasard, il n'annule pas les autres déterminants tels que (1, 2, 4, 5, 6) du tableau M.

Je suppose qu'un point soit, par exemple, triple sur la courbe (1, 2, 3, 4, 5) et simple sur (1, 2, 3, 4, 6). Il semble qu'il y ait, en ce point, trois nœuds coïncidents du lieu et que ces nœuds réunis forment un point triple. Il n'en est rien. En effet, cherchons les conditions d'un point triple du lieu; on sait qu'elles s'écrivent, en général,

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d & e \\ g & h & k & l & \\ & g & h & k & l \end{Vmatrix} = 0.$$

Il y a donc une même relation linéaire entre les éléments correspondants de ces trois lignes; donc, dans chacun des déterminants de la matrice M, il y a une même relation linéaire entre les éléments correspondants des lignes 2, 3, 4 et des lignes 1, 4, 5. On peut utiliser cette relation de manière à annuler les éléments des lignes 1 et 2 par exemple, et le point considéré est double sur la courbe représentée par le déterminant en question. Ainsi

un point ne peut être triple sur le lieu que s'il est au moins double sur chacune des courbes représentées par un déterminant de M.

Remarquons enfin que les courbes représentées par les déterminants du tableau M ne sont pas nécessairement des courbes proprement dites, mais peuvent être des systèmes de lignes et que ces systèmes peuvent avoir en commun une courbe σ (ou un ensemble de courbes). L'évanouissement de M représente alors, outre la courbe σ, un certain nombre de points isolés, intersections des parties restantes des systèmes représentés par les cinq déterminants.

5. Je vais appliquer sommairement les principes précédents à un premier exemple; j'en traiterai ensuite un autre d'une manière plus approfondie.

Un certain lieu résulte (p. 33 de l'article de M. Neuberg) de l'élimination de α et β entre les relations

$$x^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad \beta y = 2x(\alpha + p), \qquad \beta^2 = 2p\alpha,$$

ou de β entre les équations

$$x^2 = \frac{\beta^4}{4p^2} + \beta^2, \qquad \beta y = 2x\left(\frac{\beta^2}{2p} + p\right),$$

lesquelles peuvent s'écrire

$$\beta^4 + 4p^2\beta^2 - 4p^2x^2 = 0, \qquad x\beta^2 - py\beta + 2p^2x = 0.$$

Les conditions de l'existence de deux racines communes en β sont :

$$M \equiv \begin{Vmatrix} 1 & & 4p^2 & & -4p^2x^2 \\ x & -py & 2p^2x & & \\ & x & -py & 2p^2x & \\ & & x & -py & 2p^2x \end{Vmatrix} = 0.$$

a.

Le déterminant (1, 2, 3, 4), développé, donne

$$-p^3y^5 = 0,$$

le déterminant (1, 2, 3, 5),

$$2p^2x(p^2y^2 + 2p^2x^2 + 2x^4) = 0.$$

Ces deux déterminants s'annulent pour $x = y = 0$, point double indiqué par M. Neuberg. Ce point convient évidemment, puisqu'il annule les deux dernières colonnes de M. Par analogie avec une remarque précédente, on devrait s'attendre à ce que ce point soit un point quadruple du lieu. En réalité, le *lieu analytique* (éliminant de Sylvester des équations F et f) comprend, outre le *lieu géométrique*, la droite $x = 0$ comptée double. Car, pour $x = 0$, les équations $F = 0$ et $f = 0$ ont respectivement $\beta = 0$ comme racines double et simple. De plus, si l'on fait $y = ax + b$, on a deux équations en x et β qui pour toutes valeurs de a et b ont respectivement le point $x = \beta = 0$ comme point double et comme point simple. On se trouve donc dans un cas exceptionnel du n° 3. L'origine, point quadruple sur le lieu analytique, est donc seulement double sur le lieu géométrique.

Les deux déterminants s'annulent encore pour $y = 0$ et $x = -p^2$, ce qui donne encore deux points doubles imaginaires, répondant effectivement à la question, car ils n'annulent pas le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -py & 2p^2x \\ & x & -py \\ & & x \end{vmatrix},$$

et, par suite, ils n'annulent pas non plus le tableau des trois premières colonnes de M.

6. A un autre endroit de son travail (p. 25), M. Neuberg ayant trouvé les équations

$$x = a\frac{1 + \cos^2\theta}{\sin\theta}, \qquad y = -a\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta},$$

fait observer que l'élimination de θ ne donne pas de résultat assez simple. Sans chercher cette équation, je puis trouver, par la méthode précédente, des points singuliers du lieu. Avant de procéder à cette recherche, je ferai une observation sur l'exemple en lui-même. D'une part, il est assez mal choisi, parce que les équations précédentes étant résolues par rapport à x et y, il est trop simple de calculer les dérivées $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dy}{d\theta}$ et de chercher pour quelles valeurs de θ le quotient de ces deux dérivées est indéterminé; bien qu'il faille une certaine sagacité pour ne pas laisser échapper les points doubles à l'infini et que, pour décider si les points singuliers sont nodaux ou cuspidaux, le calcul soit beaucoup moins simple. En tout cas, si les équations n'étaient pas résolues par rapport à x et y, l'avantage de la méthode actuelle se verrait mieux.

A un autre point de vue, l'exemple est bien choisi : par la variété des cas particuliers qu'il présente, il indique bien jusqu'où s'étend le champ d'application des procédés que j'ai exposés et à partir de quelle limite ils cessent d'être utilisables.

En posant $\cos\theta = k$, j'ai les relations

$$x^2 = a^2\frac{(1+k^2)^2}{1-k^2}, \qquad y = -a\frac{k^3}{1-k^2}$$

ou encore, en rendant homogène par l'introduction de la troisième variable z,

$$a^2z^2k^4 + (2a^2z^2 + x^2)k^2 + a^2z^2 - x^2 = 0,$$
$$azk^3 - yk^2 + y = 0.$$

Les conditions de l'existence de deux racines communes en k sont

$$\mathrm{M} \equiv \begin{vmatrix} a^2z^2 & 2a^2z^2+x^2 & a^2z^2-x^2 & \\ a^2z^2 & 2a^2z^2+x^2 & a^2z^2-x^2 & \\ az & -y & y & \\ & az & -y & y \\ & & az & -y & y \end{vmatrix} = 0.$$

J'omets la quatrième colonne et j'obtiens un déterminant qui, développé, donne

$$(1) \qquad a^5z^5[5a^2y^2z^2 + y^2(a^2z^2 - x^2) - (a^2z^2 - x^2)^2] = 0.$$

En omettant la troisième colonne, j'ai de même

$$(2) \qquad a^4yz^4[5(a^2z^2 - x^2) - 4y^2] = 0.$$

Ces équations sont vérifiées pour $z = 0$, quels que soient x et y; on vérifie d'ailleurs que z est facteur au moins à la troisième puissance dans chacun des déterminants du tableau M. D'après une remarque antérieure, on peut en induire que les points de l'infini sont des points quadruples du lieu, lequel se composerait donc d'une sextique et de la droite de l'infini comptée quatre fois. Mais ce n'est jusqu'ici qu'une conjecture, car les équations (1) et (2) étant du troisième et du quatrième degré en k, il ne peut être question de quatre racines communes. Pareillement, il faut accorder une attention spéciale au point ($x = z = 0$) à l'infini sur l'axe des y et aux points cycliques ($z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$), mais on ne peut encore affirmer que ces points sont simples ou singuliers sur la sextique.

En dehors des points à l'infini, les équations (1) et (2) révèlent encore l'existence de six points singuliers, savoir d'abord les deux points

$$y = 0, \qquad a^2z^2 - x^2 = 0,$$

puis les quatre points définis par les relations

$$5(a^2z^2 - x^2) = 4y^2, \qquad 5a^2y^2z^2 + y^2(a^2z^2 - x^2) - (a^2z^2 - x^2)^2 = 0;$$

celles-ci peuvent s'écrire plus simplement, en supprimant des facteurs y et $a^2z^2 - x^2$ dont il a été tenu compte auparavant :

$$4y^2 = 27a^2z^2, \qquad x^2 = -8a^2z^2.$$

J'appelle P et P′ les deux premiers points; ils répondent à la question, car ils annulent les deux dernières colonnes de la

matrice M. Les quatre derniers points seront désignés par Q_1, Q_2, Q_3, Q_4; ils sont imaginaires conjugués deux à deux et répondent encore à la question, car ils n'annulent pas le déterminant

$$\begin{vmatrix} a^2z^2 & o & a^2z^2 - x^2 & o \\ az & -y & y & o \\ o & az & y & o \\ o & o & o & y \end{vmatrix}$$

qui fait partie du tableau des colonnes 1, 2, 5, 6 communes aux deux déterminants considérés de M.

7. Je pourrais m'en tenir à ce qui précède; car j'avais annoncé seulement un moyen de trouver des points singuliers d'un lieu analytique. Mais il est possible d'aller plus loin.

On a vu que les points P et P' ($y = 0$, $x = \pm az$) sont des points singuliers du lieu. Pour ces points, les équations

$$F \equiv a^2z^2k^4 + (2a^2z^2 + x^2)k^2 + (a^2z^2 - x^2) = 0,$$

$$f \equiv azk^3 - yk^2 + y = 0$$

doivent être vérifiées par deux mêmes valeurs de k (au moins). En fait, pour ces points, les équations admettent, l'une la racine double $k = 0$, l'autre la racine triple $k = 0$. On devine déjà que, puisque deux racines communes coïncident, P et P' sont des rebroussements; mais quelle conséquence géométrique peut-on tirer du fait qu'une troisième racine de $f = 0$ vient se confondre avec les deux autres?

Pour répondre à cette question et à toutes les questions analogues, supposons en général les polynômes F et f ordonnés par rapport aux puissances croissantes de k et posons

$$F \equiv U + kV + k^2W + \cdots$$

$$f \equiv u + kv + k^2w + \cdots,$$

U, V, W, ..., $u, v, w, \ldots$ étant des fonctions de x et y. Pour un point fixe du lieu, par exemple l'origine, les équations sont vérifiées généralement par *une* même valeur de k et l'on peut supposer que cette valeur soit $k = 0$.

Donnons à k une valeur infiniment petite. Le point du lieu infiniment voisin de l'origine est donné par les équations suivantes, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$U + kV = 0, \qquad u + kv = 0,$$

d'où

$$Uv - uV = 0.$$

Mais les coordonnées x et y de ce point sont aussi des infiniment petits; donc, si l'on appelle U_μ l'ensemble des termes d'ordre μ en x et y de la fonction U, on a par hypothèse $u_0 = V_0 = 0$ et, dans l'équation précédente, les termes du premier ordre infinitésimal sont

$$U_1 v_0 - u_1 V_0 = 0.$$

Cette relation donne la direction de la tangente au lieu à l'origine. Si l'on a $v_0 = 0$, c'est-à-dire si $k = 0$ est racine double de $f = 0$, la dernière relation équivaut à $u_1 = 0$, c'est-à-dire que la génératrice f est tangente au lieu, au point considéré.

Si u_1 est identiquement nul (c'est-à-dire si les coefficients de x et de y dans u_1 sont nuls), la tangente est indéterminée et l'origine est un point double; on se trouve dans le second cas exceptionnel du n° 3. Si $U_1 v_0 - u_1 V_0$ est identiquement nul, sans que v_0 le soit, on a de même un point double répondant à une seule valeur commune de k et l'on se trouve dans le premier cas exceptionnel du n° 3.

Enfin si l'on a $v_0 = V_0 = 0$, c'est-à-dire si $k = 0$ est racine double des équations $F = 0$ et $f = 0$, l'origine est encore un point double, comme on le savait. On considère alors les termes

$$U + kV + k^2 W = 0, \qquad u + kv + k^2 w = 0,$$

et, en éliminant k, on a

$$\begin{vmatrix} & U & V & W \\ U & V & W & \\ u & v & w & \\ & u & v & w \end{vmatrix} = 0.$$

Pour avoir les termes du second ordre infinitésimal, il faut, puisque U_0, V_0, u_0, v_0 sont nuls, prendre, dans les deux premières colonnes, les termes du premier degré en x, y et, dans les deux autres, les termes indépendants de x, y :

$$\begin{vmatrix} & V_1 & & W_0 \\ U_1 & V_1 & W_0 & \\ u_1 & v_1 & w_0 & \\ & u_1 & & w_0 \end{vmatrix} = (U_1 w_0 - u_1 W_0)^2 = 0.$$

Ainsi les termes du second ordre forment un carré, de sorte que le point double est un point de rebroussement. Si, en outre, $w_0 = 0$, c'est-à-dire si $k = 0$ est racine triple de $f = 0$, on a simplement $u_1^2 = 0$, de sorte que la tangente au point cuspidal du lieu est aussi la tangente à la génératrice f.

On étend sans peine ce raisonnement à des cas d'ordre plus élevé.

La démonstration pourrait se faire, sans infiniment petits, en considérant l'éliminant de Sylvestre, mais la notation est pénible.

8. J'applique ces résultats à l'exemple traité. Pour les points P et P' ($y = 0$, $x = \pm az$), $k = 0$ est racine double de $F = 0$ et racine triple de $f = 0$. Ces points sont donc des points cuspidaux du lieu et la tangente en ces points n'est autre que la génératrice f, laquelle, pour $k = 0$, est simplement $y = 0$, ou l'axe des x.

Pour les points

$$Q\left(x = \pm az\sqrt{-8}, \qquad y = \pm \frac{az}{2}\sqrt{27}\right),$$

les équations $F = 0$ et $f = 0$ se réduisent à

$$k^4 - 6k^2 + 9 = (k + \sqrt{3})^2 (k - \sqrt{3})^2 = 0,$$
$$2k^3 \mp 3\sqrt{3}k^2 \pm 3\sqrt{3} = (k \mp \sqrt{3})^2 (2k \pm \sqrt{3}) = 0,$$

les signes supérieurs et inférieurs devant être pris ensemble. Donc, pour chacun de ces quatre points Q, les équations ont une racine double commune en k et les quatre points Q sont aussi des rebroussements.

Si l'on a $z = 0$, et x, y quelconques, les équations $F = 0$ et $f = 0$ ont trois racines communes, $k = \infty$, $k = \pm -1$; de plus, la racine $k = \infty$ est double pour $F = 0$. Et enfin, si l'on pose $z = mx + ny$, les équations résultantes

$$F_1\left(\frac{x}{y}, k\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1\left(\frac{x}{y}, k\right) = 0$$

ont respectivement le point

$$\left(k = \infty, \quad \frac{x}{y} = -\frac{n}{m}\right)$$

pour point double et pour point simple, quels que soient m et n. Pour $k = \infty$, on est donc dans un cas exceptionnel du n° 3 et le lieu se compose de la droite de l'infini comptée quadruple et d'une courbe du sixième degré.

Pour savoir si le point à l'infini de l'axe des y ($x = z = 0$) est singulier sur la sextique, posons $z = mx$; les équations résultantes sont

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 [a^2m^2k^4 + (2a^2m^2 + 1)k^2 + (a^2m^2 - 1)] = 0,$$
$$am\left(\frac{x}{y}\right)k^3 - k^2 + 1 = 0.$$

La seconde (en considérant $\frac{x}{y}$ et k comme variables) a les points simples

$$\frac{x}{y} = 0, \quad k = \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{y} = 0, \quad k = \pm 1.$$

La première a pour points doubles $\frac{x}{y} = 0$ et k quelconque. Un cas exceptionnel du n° 3 est donc triplement réalisé et le point $x = z = 0$ est sextuple sur le lieu analytique, donc double sur la courbe du sixième ordre.

On pourrait opérer d'une manière analogue pour les points cycliques; mais, pour aller plus vite, je vais suivre une autre voie. On pouvait prévoir que le point à l'infini de l'axe des y serait double sur la sextique; car, quelque valeur finie que l'on donne à x, il en résulte quatre valeurs de k seulement; aucune de ces valeurs n'est infinie puisque $k = \infty$ répond à $z = 0$.

Ainsi le point à l'infini de l'axe des y est un point cuspidal ayant pour tangente la droite de l'infini. Les autres points de la sextique situés à l'infini sont les points cycliques, car en faisant $x^2 = -y^2$ et en éliminant y, on n'a qu'une équation du quatrième degré en k. Par raison de symétrie, les points cycliques doivent être tous deux doubles ou tous deux simples. La première hypothèse est impossible, puisque la droite de l'infini contiendrait alors sept points de la sextique; cette droite a donc, sur l'axe du y, quatre points coïncidents communs avec la courbe. Ainsi le rebroussement à l'infini sur l'axe des y est une singularité d'ordre supérieur analogue au *rebroussement kératoïde* (voir Salmon, *Courbes planes*). Pour connaître l'espèce de singularité que l'on rencontre ici, il faut absolument l'équation de la courbe ou du moins la forme de cette équation. Comme la figure est visiblement symétrique par rapport aux deux axes coordonnés, cette équation ne contient que les puissances paires des variables et, d'après ce qui précède, elle peut s'écrire

$$z^2\varphi(x^2, y^2, z^2) + x^4(x^2 + y^2) = 0,$$

φ étant une fonction du second degré.

Les premières polaires des trois sommets du triangle de référence sont :

$$z^2\frac{d\varphi}{dx} + 6x^5 + 4x^3y^2 = 0, \quad z^2\frac{d\varphi}{dy} + 2x^4y = 0, \quad z^2\frac{d\varphi}{dz} + 2z\varphi = 0.$$

Trois de leurs points communs coïncident en $x = z = 0$; donc trois points doubles de la courbe y sont concentrés. La première polaire d'un point quelconque a la forme

$$z\psi + x^5\chi = 0,$$

et possède donc un point d'inflexion au point $x = z = 0$; deux de ses tangentes y sont confondues avec la tangente au point singulier que j'analyse; celui-ci résulte donc de la réunion d'un nœud et de deux points cuspidaux.

Ce point doit donc, dans les formules de Plücker, diminuer de huit unités la classe de la sextique et, comme il y a en outre six points cuspidaux P, P′, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, la classe de la courbe est

$$m = 6 \times 5 - 18 - 8 = 4,$$

résultat conforme à l'équation tangentielle donnée par M. Neuberg.

9. Dans les questions générales, on peut supposer qu'il n'y ait que des points singuliers isolés. Cette hypothèse est faite implicitement par les auteurs qui établissent qu'une courbe rationnelle est de genre zéro. Je puis faire la même supposition pour résoudre le problème plus général que voici : chercher le genre d'une courbe représentée par deux équations contenant un même paramètre. Soit d'abord un tableau rectangulaire à k lignes et $k + 1$ colonnes dont tous les éléments sont des formes linéaires ternaires; désignons par τ_k le nombre des points représentés par l'évanouissement de cette matrice. D'après ce qui a été expliqué au début du présent travail, on a

$$r_k = k^2 - r_{k-1}.$$

Cette formule de réduction donne

$$r_k = k^2 - (k-1)^2 + (k-2)^2 - \cdots \pm 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Si les éléments du tableau étaient des formes toutes d'ordre n, le nombre des points serait

$$\frac{n^2k(k+1)}{2}.$$

Soient ensuite deux équations, l'une de degré m en x, y, z et contenant le paramètre variable à la puissance μ; l'autre de degré n et contenant ce paramètre à la puissance ν. Le lieu est, en général, de l'ordre $m\nu + n\mu$. Supposons $\mu > \nu$.

Les R points doubles du lieu annulent un tableau à $\mu + \nu - 1$ colonnes, dont $\nu - 1$ lignes contiennent des formes d'ordre m et $\mu - 1$ lignes des formes d'ordre n. En omettant la dernière ou l'avant-dernière colonne, on a deux courbes de degré $[m(\nu-1) + n(\mu - 1)]$; ces courbes ont $[m(\nu - 1) + n(\mu - 1)]^2$ points communs, d'où il faut défalquer ceux qui annulent le tableau des $\mu + \nu - 2$ premières colonnes. En omettant, dans ce tableau, la première ou la dernière ligne, on a deux courbes, respectivement d'ordre $m\nu + n\mu - 2m - n$ et $m\nu + n\mu - m - 2n$, dont il faut compter les points communs et en défalquer les R_1 points qui annulent un tableau M_1 déduit de M par la suppression de la première et la dernière ligne ainsi que des deux dernières colonnes. Ainsi,

$$R = (m\nu + n\mu - m - n)^2$$
$$- (m\nu + n\mu - 2m - n)(m\nu + n\mu - m - 2n) + R_1,$$

ou

$$R = (m + n)(m\nu + n\mu - m - n) - mn + R_1.$$

Considérons le tableau $M_k (k < \nu - 1)$ déduit du tableau M par la suppression des k premières et des k dernières lignes ainsi que des $2k$ dernières colonnes; on aura pareillement, en appelant R_k le nombre des points qu'il représente,

$$R_k = [m\nu + n\mu - (k+1)m - (k+1)n]^2$$
$$- [m\nu + n\mu - (k+2)m - (k+1)n][m\nu + n\mu - (k+1)m - (k+2)n]$$
$$+ R_{k+1},$$

ou

$$R_k = (m + n)[m\nu + n\mu - (k+1)m - (k+1)n] - mn + R_{k+1}.$$

On peut continuer ainsi jusqu'au tableau $M_{\nu-1}$ qui ne contient plus que $\mu - \nu$ lignes et dont tous les éléments sont d'ordre n; il s'annule pour

$$R_{\nu-1} = \tfrac{1}{2} n^2(\mu - \nu)(\mu - \nu + 1) \text{ points.}$$

La formule de réduction donne donc

$$R = (\nu - 1)(m + n)(m\nu + n\mu) - \tfrac{1}{2}(m + n)^2\nu(\nu - 1) - mn(\nu - 1) + \tfrac{1}{2} n^2(\mu - \nu)(\mu - \nu + 1).$$

Connaissant l'ordre $m\nu + n\mu$ du lieu géométrique et le nombre R de ses points doubles, on a le genre

$$g = \tfrac{1}{2}(m\nu + n\mu - 1)(m\nu + n\mu - 2) - R,$$

ou

$$g = (m\nu + n\mu - 1)(m\nu + n\mu - 2) - (\nu - 1)(m + n)(m\nu + n\mu) + \tfrac{1}{2}(m + n)^2\nu(\nu - 1) + mn(\nu - 1) - \tfrac{1}{2} n^2(\mu - \nu)(\mu - \nu + 1).$$

Si l'on a $m = n = 1$, la courbe est rationnelle et l'on trouve effectivement

$$g = 0.$$

REMARQUES

SUR

UN FAISCEAU DE CONIQUES

PAR

J. FAIRON

RÉPÉTITEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

REMARQUES

SUR

UN FAISCEAU DE CONIQUES

1. Considérons la conique fondamentale $\mathcal{C}_2$, représentée par les équations paramétriques

$$z_1 : z_2 : z_3 = \lambda^2 : \lambda : 1.$$

Désignons par λ_i le paramètre d'un point P_i de cette courbe, et par d_{ik} le côté $P P_k$ du quadrilatère complet inscrit $P_1 P_2 P_3 P_4$. Ce côté a pour équation

$$d_{ik} \equiv z_1 - z_2(\lambda_i + \lambda_k) + z_3\lambda_i\lambda_k = 0,$$

et pour pôle, par rapport à $\mathcal{C}_2$, le point de coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 = 2\lambda_i\lambda_k : (\lambda_i + \lambda_k) : 2.$$

L'équation

$$d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23} = 0,$$

ou bien

$$3z_1^2 + 2z_2^2\Sigma\lambda_1\lambda_2 + 3z_3^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - 3z_2z_3\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + z_1z_3\Sigma\lambda_1\lambda_2 - 3z_1z_2\Sigma\lambda_1 = 0 \quad (1)$$

représente une conique passant par les quatre points considérés.

Si nous supposons que les quantités λ_i sont racines d'une forme biquadratique binaire égalée à zéro,

$$f_1 \equiv a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4 = 0,$$

l'équation (1) s'écrira :

$$K \equiv a_0z_1^2 + 4a_2z_2^2 + a_4z_3^2 + 4a_3z_2z_3 + 2a_2z_1z_3 + 4a_1z_1z_2 = 0. \quad (2)$$

Cette dernière formule peut encore se déduire de $f_4 = 0$, mise sous la forme

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2} + 2x_1x_2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} = 0,$$

par la correspondance (*) :

$$x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2 = z_1 : z_2 : z_3. \qquad (5)$$

La conique (2) a pour discriminant l'expression

$$4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

qui est l'invariant cubique, J, de la forme f_4. Dans le cas où cet invariant est nul, cette conique se ramène à un système de deux des droites d_{ik}; l'équation (2) et, par exemple, celle-ci

$$d_{12}d_{34} = 0,$$

sont identiques. Mais cette dernière peut s'écrire :

$$K + \frac{1}{5}(z_1z_3 - z_2^2)\left[2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + 2\lambda_3\lambda_4\right] = 0;$$

on doit donc avoir

$$2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + 2\lambda_3\lambda_4 = 0,$$

égalité montrant que le pôle de la droite d_{12} est sur d_{34} et réciproquement.

On a ainsi une démonstration de la propriété de l'invariant J exprimant, quand il s'annule, que les racines de f_4 sont conjuguées harmoniques.

(*) Voir à ce sujet un article de M. Neuberg, *Mathesis*, 1901, p. 244, et notre travail « Sur un système de représentation géométrique des formes algébriques binaires » (*Mémoires de la Société royale des sciences de Liége*, 1901, 3e sér., t. III).

Nous avons trouvé (*) que l'évanouissement de l'invariant quadratique de f_4,

$$I \equiv a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

exprime la condition pour que la conique (2) puisse se représenter par les formules

$$z_1 : z_2 : z_3 = \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} : -\frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} : \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2},$$

où $\frac{x_1}{x_2}$ est le paramètre d'un point de $\mathcal{C}_2$. Il exprime aussi que les racines de la forme biquadratique constituent un quaterne équianharmonique.

2. L'équation (1) peut s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &3z_1^2 - 3z_1 z_2 \Sigma\lambda_1 + (z_1 z_3 + 2z_2^2)\,\Sigma\lambda_1\lambda_2 - 3z_2 z_3 \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &- \lambda_4\left[3z_1 z_2 - (z_1 z_3 + 2z_2^2)\,\Sigma\lambda_1 + 3z_2 z_3\,\Sigma\lambda_1\lambda_2 - 3z_3^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

le signe sommatoire portant seulement sur λ_1, λ_2, λ_3.

Lorsque λ_4 varie, nous obtenons un faisceau F de coniques, telles que le paramètre de chaque élément est le paramètre d'un point de $\mathcal{C}_2$; cet élément passe par ce point et par trois points P_1, P_2, P_3 qui sont des points de base.

Si l'on considère λ_1, λ_2, λ_3 comme étant les racines d'une forme cubique binaire égalée à zéro

$$f_3 \equiv b_x^3 \equiv b_0 x_1^3 + 3b_1 x_1^2 x_2 + 3b_2 x_1 x_2^2 + b_3 x_2^3 = 0,$$

l'équation du faisceau se transforme en celle-ci :

$$\left.\begin{aligned} &b_0 z_1^2 + 3b_1 z_1 z_2 + b_2(z_1 z_3 + 2z_2^2) + b_3 z_2 z_3 \\ &- \lambda\left[b_0 z_1 z_2 + b_1(z_1 z_3 + 2z_2^2) + 3b_2 z_2 z_3 + b_3 z_3^2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Les trois coniques du faisceau ayant pour paramètre respectivement λ_1, λ_2, λ_3, sont tangentes à la conique fondamentale aux

(*) Voir le renvoi de la page précédente.

points P_1, P_2, P_3; leur équation peut se tirer d'expressions de la forme

$$d_{23}d_{11} + 2d_{12}d_{13} = 0$$

où d_{11} est la tangente au point P_1, à $\mathcal{C}_2$.

Le quatrième point de base du faisceau vérifie le système

$$b_0z_1^2 + 3b_1z_1z_2 + b_2(z_1z_3 + 2z_2^2) + b_3z_2z_3 = 0,$$
$$b_0z_1z_2 + b_1(z_1z_3 + 2z_2^2) + 3b_2z_2z_3 + b_3z_3^2 = 0,$$

qui donne pour les coordonnées de ce point

$$z_1 : z_2 : z_3 = 2(b_1b_3 - b_2^2) : (b_1b_2 - b_0b_3) : 2(b_0b_2 - b_1^2).$$

C'est le pôle B, par rapport à $\mathcal{C}_2$, d'une droite b dont l'équation est

$$(b_0b_2 - b_1^2)z_1 + (b_0b_3 - b_1b_2)z_2 + (b_1b_3 - b_2^2)z_3 = 0,$$

qui rencontre la conique fondamentale aux points dont les paramètres sont les racines du hessien $H_3 \equiv (f_3, f_3)^2$ de la forme f_3.

3. Il est évident, d'après ce qui précède, que la conique de paramètre λ, du faisceau F, rencontre $\mathcal{C}_2$ aux points dont les paramètres sont racines de la forme biquadratique

$$b_0x_1^4 + (3b_1 - \lambda b_0)x_1^3x_2 + 3(b_2 - \lambda b_1)x_1^2x_2^2 + (b_3 - 3\lambda b_2)x_1x_2^3 - \lambda b_3x_2^4 = 0, \quad (6)$$

décomposable de cette manière

$$(x_1 - \lambda x_2)\, b_x^3 = 0.$$

Le discriminant de cette conique, invariant cubique de la forme précédente, s'écrira donc :

$$\begin{vmatrix} 2b_0 & 3b_1 - \lambda b_0 & b_2 - \lambda b_1 \\ 3b_1 - \lambda b_0 & 4(b_2 - \lambda b_1) & b_3 - 3\lambda b_2 \\ b_2 - \lambda b_1 & b_3 - 3\lambda b_2 & -2\lambda b_3 \end{vmatrix};$$

cette formule coïncide avec le covariant primaire du troisième

ordre $Q_3 \equiv (f_3, H_3)^1$ de la cubique f_3, où $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$, que nous exprimons ainsi par un déterminant à trois lignes.

Nous concluons de là que les coniques dégénérées du faisceau s'obtiennent en remplaçant λ, dans l'équation (5), successivement par les racines de $Q_3 = 0$. Les couples de droites correspondantes sont P_1P_2 et P_3B, P_2P_3 et P_1B, P_3P_1 et P_2B. Le point M_3 relatif à la racine de $Q_3 = 0$, qui fournit le premier couple, se trouve (n° **2**) à l'intersection de P_3B et C_2; mais ce couple est (n° **1**) conjugué harmonique du couple P_1P_2, la droite M_3P_3 passe donc par l'intersection des tangentes en P_1 et P_2 à C_2.

Nous avons retrouvé, par ce raisonnement, la propriété caractéristique des racines de f_3 et Q_3 d'être telles qu'une racine de Q_3 et les trois racines de f_3 forment toujours une série harmonique, et aussi un mode connu (*) de représentation du système fondamental de la forme cubique binaire dans le plan. Cette représentation consiste en ce que, les racines de f_3 étant figurées par les points de contact des côtés d'un triangle circonscrit à C_2, les racines de Q_3 sont marquées sur cette conique-support par les trois droites joignant les points de contact aux sommets opposés, et celles de H_3 par les points de contact des tangentes menées à la courbe par le point d'intersection de ces trois droites.

4. Le point de paramètre λ marquera, sur la conique fondamentale, avec les points de base P_1, P_2, P_3, une division équianharmonique si l'invariant quadratique de la forme (6) est nul. Cet invariant peut s'écrire :

$$12\left[(b_0b_2 - b_1^2)\lambda^2 + (b_0b_3 - b_1b_2)\lambda + (b_1b_3 - b_2^2)\right];$$

c'est le hessien H_3 de la forme f_3. Il résulte de là que deux coniques du faisceau figurent sur C_2 une division équianharmonique; elles sont déterminées par l'un quelconque des points d'intersection de la droite b avec C_2 et les quatre points de base.

(*) G. Salmon, *Traité de géométrie analytique* (sections coniques), trad. de MM. Résal et Vaucheret, 1884, p. 664. Voir aussi notre *Mémoire cité*, p. 11.

De là résulte aussi la propriété des racines de H_3 de former chacune, avec les racines de f_3, un quaterne équianharmonique.

5. Si, dans l'équation (4), nous considérons λ_1, λ_2, λ_3 comme étant racines de $Q_3 = 0$, nous obtenons un nouveau faisceau, G, de coniques. Le discriminant de l'une quelconque d'entre elles peut s'écrire

$$R^2 . f_3$$

et l'invariant quadratique signalé au numéro précédent est

$$R . H_3,$$

expressions dans lesquelles R est l'invariant de f_3.

Ces expressions montrent que les propriétés des racines de f_3 et Q_3, ou des ternes de points $P_1P_2P_3$ et $M_1M_2M_3$ (celui-ci correspondant aux racines de Q_3) sont réciproques entre elles; que les points racines de $H_3 = 0$ jouent le même rôle par rapport à ces deux groupes.

6. L'équation du lieu de l'intersection des coniques du faisceau F avec la tangente correspondante au point λ de C_2 s'obtient facilement par l'élimination de λ entre la formule (5) et celle-ci

$$z_1 - 2z_2\lambda + z_3\lambda^2 = 0.$$

Ce lieu se compose de la conique fondamentale et de la courbe cubique représentée par

$$z_1(b_0z_1 + 2b_1z_2 + b_2z_3)^2 + 2z_2(b_0z_1 + 2b_1z_2 + b_2z_3)(b_1z_1 + 2b_2z_2 + b_3z_3) + z_3(b_1z_1 + 2b_2z_2 + b_3z_3)^2 = 0,$$

équation qui peut se déduire de

$$\left(x_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)^2 = [b_x^3]^2 = 0$$

par la substitution (3).

Il résulte du mode de génération que cette courbe est tangente à la conique C_2 aux points P_1, P_2, P_3; qu'elle a pour point double le point B obtenu au moyen des coniques considérées au n° 4 et des tangentes à la conique fondamentale aux points racines du hessien, lequel point B est l'intersection des droites

$$b_0 z_1 + 2b_1 z_2 + b_2 z_3 = 0,$$
$$b_1 z_1 + 2b_2 z_2 + b_3 z_3 = 0;$$

que cette courbe rencontre la droite b aux trois points d'intersection des côtés correspondants des deux triangles homologiques qui sont $P_1P_2P_3$ et le triangle formé par les tangentes aux points $M_1M_2M_3$. Ces points sont aussi les intersections des côtés correspondants du triangle $M_1M_2M_3$ et du triangle des tangentes aux points $P_1P_2P_3$.

La courbe cubique correspondant au faisceau G passe par les trois mêmes points sur b et a le même point double B.

Pour d'autres propriétés de cette cubique, voir notre mémoire cité, n° 35.

7. On pourrait facilement, à l'aide des faisceaux F et G, obtenir sur la conique fondamentale la représentation de la plupart des covariants des systèmes composés de la forme cubique f_3 et d'autres formes binaires. En voici deux exemples, aisés à vérifier.

A la forme $(f_3, f_1)^1$ — où f_1 est une forme linéaire — correspond une sécante de C_2, laquelle est tangente, au point B, à la conique du faisceau G qui a pour paramètre λ, racine de $f_1 = 0$. Cette sécante marque, par suite, sur C_2, l'image des racines de $(f_3, f_1)^1 = 0$. Nous obtenons, par cette remarque, une construction nouvelle des éléments doubles de l'involution quadratique qui correspond à un point donné (λ) dans une involution cubique du second rang dont on connait les points triples P_1, P_2, P_3.

On considère à la fois les faisceaux F et F′ relatifs aux formes cubiques binaires f_3 et f'_3; ils passent respectivement par les

points B et B′ qui correspondent aux hessiens de ces formes. Les tangentes en ces points à deux coniques de ces faisceaux, déterminées par un même paramètre λ, forment deux rayons homologues de deux faisceaux projectifs de droites. La conique engendrée par l'intersection de ces rayons répond à la forme biquadratique $(Q_3, Q'_3)^1$ et marque, sur $\mathcal{C}_2$, les racines de cette forme. En remplaçant les faisceaux F et F′ par G et G′ (correspondant à Q_3 et Q'_3), on construit la conique relative à la forme $(f_3, f'_3)^1$ et, sur $\mathcal{C}_2$, les racines de cette forme.

SUR

LES NOMBRES PLÜCKÉRIENS

DE LA

COURBE D'INTERSECTION

DE

DEUX SURFACES ALGÉBRIQUES

POSSÉDANT DES COURBES DOUBLES

PAR

Le Dr W.-A. VERSLUYS

SUR

LES NOMBRES PLÜCKÉRIENS

DE LA

COURBE D'INTERSECTION

DE

DEUX SURFACES ALGÉBRIQUES

POSSÉDANT DES COURBES DOUBLES

§ 1. Des formules donnant les nombres *plückériens* de la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques U et V en fonction des singularités de ces deux surfaces se trouvent indiquées dans le *Repertorio di Matematiche superiori*, t. II, de E. Pascal, page 325. On trouve la démonstration des formules principales dans les ouvrages de Salmon, *Geometry of three dimensions*, §§ 342-344, et de L. Cremona-Curtze, *Oberflächen*, § 117.

Pour les singularités de la courbe d'intersection de deux surfaces développables, ces formules ne sont plus applicables, puisque les surfaces développables possèdent généralement une arête de rebroussement et une courbe nodale. Dans les formules données par Pascal et dans les démonstrations de Salmon et de Cremona, les deux surfaces U et V sont supposées ne pas posséder de courbes doubles.

On peut appliquer, au cas plus général de la présence de courbes doubles, les formules données par Pascal, en les modifiant légèrement. Dans toutes les formules, sauf celles pour les singularités β et H, il suffit de substituer pour les nombres χ et δ les valeurs β et H. Les formules qui donnent les singularités β et H deviennent :

$$\beta = n_1\nu_2 + n_2\nu_1 + \chi,$$
$$\mathrm{H} = n_1\xi_2 + n_2\xi_1 + \delta;$$

c'est ce que je me propose de démontrer.

§ 2. Supposons que la surface U est du degré n_1, possède une courbe cuspidale du degré ν_1 et une courbe nodale du degré ξ_1. De même, la surface V est du degré n_2 et possède des courbes cuspidales et nodales respectivement des degrés ν_2 et ξ_2. Les surfaces U et V ont un contact ordinaire en δ points et un contact stationnaire en χ points. Soit s la courbe d'intersection des surfaces U et V ; je suppose que cette courbe ne se décompose pas ; son degré sera $n = n_1n_2$.

Les χ points de contact stationnaire sont des points de rebroussement β de la courbe s (*). La courbe cuspidale ν_1 de la surface U rencontre $n_2\nu_1$ fois la surface V en des points de rebroussement de la courbe s. En effet, un tel point P est un point double de la courbe d'intersection s, et les tangentes aux deux branches de la courbe s coïncident avec la droite d'intersection du plan tangent en le point P à la surface V et du plan tangent double de la surface U en ce point P. De même, les $n_1\nu_2$ points de rencontre de la courbe cuspidale ν_2 avec la surface U sont des points stationnaires de la courbe s, ce qui donne la relation

$$\beta = n_1\nu_2 + n_2\nu_1 + \chi.$$

Les δ points de contact ordinaire des deux surfaces U et V sont des nœuds H de la courbe s (**). La courbe nodale ξ_1 de

(*) Salmon, *loc. cit.*, § 344.
(**) Idem.

la surface U rencontre la surface V $n_2\xi_1$ fois en des points qui sont des points triples ordinaires τ de la surface composée des deux surfaces U et V et de sa courbe nodale. Des trois branches de la courbe nodale qui passent par un point τ, l'une appartient à la courbe ξ_1, les deux autres appartiennent à la courbe s. Un point τ est donc un nœud H de la courbe s. Les $n_1\xi_2$ points de rencontre de la courbe ξ_2 avec la surface U sont également des nœuds H de la courbe s, ce qui donne la relation

$$H = n_1\xi_2 + n_2\xi_1 + \delta.$$

§ 3. Cremona et Salmon déterminent le rang r de la courbe s à l'aide d'une surface L du degré $n_1 + n_2 - 2$, qui est le lieu des points pour lesquels les plans polaires par rapport aux surfaces U et V se coupent suivant des droites qui rencontrent la droite arbitraire l. Si les équations de la droite l sont

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0,$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0,$$

l'équation de la surface L sera

$$L = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En un point de rencontre P de cette surface L avec la courbe d'intersection s, les deux plans polaires sont les plans tangents aux surfaces U et V en ce point P. Leur droite d'intersection est donc la tangente à la courbe s au point P, d'où il suit que le rang de la courbe s est, en général,

$$r = n_1n_2(n_1 + n_2 - 2).$$

Pour les points χ et δ, les deux plans tangents coïncident; donc pour ces points, on a

$$U_1 : V_1 = U_2 : V_2 = U_3 : V_3 = U_4 : V_4,$$

et le déterminant L s'annule pour les points χ et δ. La surface L passe donc par ces points doubles et y rencontre la courbe s, tandis que les tangentes en ces points à la courbe s ne rencontrent pas, en général, la droite arbitraire l. Le rang de la courbe s sera donc diminué pour chaque point δ et χ.

§ 4. Soit m le nombre de fois que la courbe s rencontre la surface L en un point δ. Alors il faut diminuer de m le rang de la courbe s pour chaque point δ. Le point δ étant un nœud de la courbe s, ce nombre m est au moins égal à 2. Prenons le point δ pour origine des coordonnées et le plan tangent commun pour plan $z = 0$. Les équations des surfaces U et V seront :

$$0 = z + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gxz + 2lyz + \text{etc},$$
$$0 = z + a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'xz + 2l'yz + \text{etc}.$$

En n'écrivant que les termes du degré le moins élevé dans l'équation de la surface L, on obtient :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 2ax + 2hy + 2gz & 2hx + 2by + 2lz & 1 & (n_1 - 1)z \\ 2a'x + 2h'y + 2g'z & 2h'x + 2b'y + 2l'z & 1 & (n_2 - 1)z \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux dernières rangées de ce déterminant deviennent identiques pour $x = y = z = 0$; l'origine se trouve donc sur la surface L, et l'on voit facilement que l'origine est un point simple. La surface L rencontre la courbe s en plus de deux points si cette surface est tangente à une des deux branches de la courbe s qui passent par le point δ. Coupons donc la surface L par le plan $z = 0$. On trouve facilement que les termes du premier degré de l'équation de la courbe d'intersection Σ sont :

$$(a_1b_4 - b_1a_4)\{(h - h')x + (b - b')y\} + (a_4b_2 - b_4a_2)$$
$$\{(a - a')x + (h - h')y\}.$$

La direction de la tangente à la courbe Σ en le point δ dépendra donc, en général, des paramètres a_1, a_2, a_4, b_1, b_2, b_4 de la droite arbitraire l. Cette tangente ne coïncide donc pas, sauf pour des positions particulières de la droite l, avec une tangente en le point δ à la courbe s. Un point δ compte ainsi pour deux intersections de la courbe s avec la surface L. Il faut donc diminuer de 2 le rang de la courbe s pour chaque point δ.

§ 5. La direction de la tangente à la courbe Σ au point de contact des deux surfaces U et V est indépendante de la position de la droite l, sous la condition :

$$\frac{h - h'}{a - a'} = \frac{b - b'}{h - h'} = v.$$

En effet, les termes du premier degré dans l'équation de la courbe Σ sont alors

$$\{v(a_1b_4 - a_4b_1) + (a_4b_2 - a_2b_4)\}\{(a - a')x + (h - h')y\},$$

et l'équation de la tangente est

$$(a - a')x + (h - h')y = 0.$$

La condition

$$\frac{h - h'}{a - a'} = \frac{b - b'}{h - h'}$$

indique que les deux surfaces ont à l'origine un contact stationnaire χ (*). La tangente à la courbe s est alors aussi

$$(a - a')x + (h - h')y = 0.$$

La courbe s rencontre donc la courbe Σ trois fois en un point χ. La courbe Σ étant située sur la surface L, la courbe s

(*) Salmon, *loc. cit.*, §§ 203 et 204.

rencontre en un point χ trois fois la surface L. Il faut donc diminuer de 3 le rang de la courbe s pour chaque point χ.

§ 6. Pour chaque point de la courbe cuspidale ν_1, les quatre fonctions dérivées U_1, U_2, U_3 et U_4 sont nulles. La surface L passe donc par la courbe ν_1. Je démontrerai que la surface L possède en chaque point de la courbe cuspidale le même plan tangent que la surface U. Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque de la courbe cuspidale ν_1. L'équation de la surface U sera alors de la forme

$$0 = z^2 + ax^3 + \text{etc.}$$

Les termes du degré le moins élevé des fonctions dérivées U_1, U_2 et U_4 seront donc du second degré. Le terme du degré le moins élevé dans la fonction U_3 sera $2z$. Le terme le moins élevé du développement du déterminant L sera donc le terme Cz, ce qui démontre que l'origine est un point ordinaire de la surface L dont le plan tangent coïncide avec le plan tangent double $z = 0$ de la surface U.

Considérons maintenant un point λ où la courbe ν_1 rencontre la surface V. Ce point λ est un point stationnaire de la courbe s, et la tangente à la courbe en ce point se trouve dans le plan tangent double de la surface U. Nous venons de voir que ce plan tangent double est aussi le plan tangent de la surface L au point λ. La tangente à la courbe s au point stationnaire λ se trouve donc dans le plan tangent en λ à la surface L. Par conséquent, un point λ compte pour trois intersections de la courbe s avec la surface L, et la présence de chaque point λ diminue de trois unités le rang de la courbe s. Évidemment, il en est de même des points d'intersection de la courbe ν_2 avec la surface U.

§ 7. On voit facilement que la surface L passe par la courbe nodale ξ_1, que cette courbe est une courbe simple de la surface L et que le plan tangent à la surface L en un point quelconque de la courbe ξ_1 dépend de la position de la droite l. Un point τ, où

la courbe ξ_1 rencontre la surface V, est un nœud de la courbe s et un point ordinaire de la surface L, tandis que pour des positions quelconques de la droite l, les tangentes à la courbe s ne seront pas situées dans le plan tangent de la surface L. Un point τ compte donc pour deux intersections de la courbe s avec la surface L, et la présence d'un point τ diminue de deux unités le rang de la courbe s. Il en est de même des points de rencontre τ de la courbe ξ_2 avec la surface U.

Des §§ 3-7, il résulte que le rang de la courbe d'intersection s est :

$$r = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2\delta - 2(n_1\xi_2 + n_2\xi_1) - 3\chi - 3(n_1\nu_2 + n_2\nu_1),$$

$$r = n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2H - 3\beta.$$

§ 8. Une bitangente ω de la courbe s est aussi une bitangente commune des deux surfaces U et V, telle que les deux points de contact avec la surface U coïncident avec les deux points de contact avec la surface V. Les bitangentes des deux surfaces U et V formant deux congruences, les bitangentes communes doivent satisfaire à quatre conditions. Il existe donc des bitangentes communes en nombre fini. Ainsi, en général, il n'existera pas des bitangentes communes satisfaisant en plus aux deux conditions de la coïncidence des points de contact (condition qui est nécessaire, mais pas suffisante), ce qui donne pour le cas général :

$$\omega = 0.$$

Si les deux surfaces occupent des positions particulières, la singularité d'une tangente double ω peut se présenter. Par exemple, si les deux surfaces sont des surfaces développables, une tangente commune des deux arêtes de rebroussement est une tangente double ω de la courbe d'intersection s (*).

(*) Cremona, *loc. cit.*, § 101.

§ 9. Une tangente stationnaire v de la courbe s est aussi une tangente stationnaire des deux surfaces U et V. Les tangentes stationnaires des deux surfaces U et V forment deux congruences. Il existe donc un nombre fini de droites qui sont des tangentes stationnaires communes des deux surfaces U et V. Pour que l'on ait une tangente stationnaire de la courbe s, il faut que la tangente stationnaire commune des deux surfaces U et V soit tangente à ces surfaces au même point. Parmi des droites en nombre fini, il n'existe, en général, aucune droite satisfaisant à une nouvelle condition; donc :

$$v = 0.$$

Un plan G qui est deux fois osculateur à la courbe s rencontre les deux surfaces U et V suivant deux courbes qui ont deux contacts d'ordre 2. Un plan qui coupe les deux surfaces U et V suivant deux courbes qui ont un seul contact d'ordre 2 (ce sont les plans osculateurs de la courbe s) doit satisfaire à deux conditions. Les plans G doivent donc satisfaire à quatre conditions; par conséquent, il n'existera, en général, aucun plan osculateur double G de la courbe s, donc

$$G = 0.$$

Des six formules :

$$\begin{aligned}
n &= n_1 n_2, \\
r &= n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2) - 2H - 3\beta, \\
\beta &= \beta, \\
H &= H, \\
G &= 0, \\
\omega &= 0, \\
v &= 0,
\end{aligned}$$

on déduit, à l'aide des formules de Cayley-Plücker, les expressions pour les autres singularités de la courbe s. Ces six formules sont les mêmes que les formules indiquées par Pascal, sauf la

substitution de H et de β pour δ et χ. On trouve donc pour les autres singularités aussi les mêmes formules, sauf cette substitution (*). Les valeurs de H et de β sont maintenant :

$$H = \delta + n_1\xi_2 + n_2\xi_1,$$
$$\beta = \chi + n_1\nu_2 + n_2\nu_1.$$

§ 10. Pour les surfaces développables, la valeur de β se simplifie un peu, puisque pour ces surfaces on aura, en général, $\chi = 0$, ce que je démontrerai.

Prenons l'origine des coordonnées en un point de contact de deux surfaces développables U et V, et prenons pour les axes des x et des y les deux génératrices le long desquelles ces deux surfaces sont tangentes au plan $z = 0$. Les équations des surfaces U et V sont :

$$0 = z + ax^2 + 2gzx + 2lzy + \text{etc.},$$
$$0 = z + b'y_2 + 2g'zx + 2l'zy + \text{etc.}$$

La condition pour un contact stationnaire est :

$$(a - a')(b - b') = (h = h')^2 \quad (**).$$

Elle devient ici :

$$-ab' = 0.$$

Donc, $a = 0$ ou $b' = 0$, ce qui exprime que le plan $z = 0$ doit être un plan tangent stationnaire α d'une des deux surfaces U et V. Cette condition étant évidemment suffisante, on obtient ce théorème : *Deux surfaces développables ont seulement un contact stationnaire si un plan stationnaire α de l'une des deux développables est un plan tangent de l'autre.*

(*) Dans la formule, pour y se trouve une petite erreur qui ne se trouve plus dans la traduction allemande.

(**) SALMON, *loc. cit.*, § 204.

On voit facilement que : *Si un plan tangent commun de deux surfaces développables est un plan stationnaire des deux surfaces, le point de contact est un point triple de la courbe d'intersection* s*; ce point triple n'est pas un point triple de la surface composée des deux surfaces* U *et* V.

Delft, octobre 1904.

RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS CYLINDRIQUES

PAR

W. KAPTEYN

RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS CYLINDRIQUES

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous proposons de déterminer la valeur de quelques intégrales contenant des fonctions cylindriques de première espèce. Dans la seconde partie, nous présenterons quelques applications de ces formules sur la sommation de certaines séries composées des mêmes fonctions.

PREMIÈRE PARTIE

1. Dans une communication à l'Académie des Sciences d'Amsterdam (*), nous avons démontré indirectement la formule

$$(1) \qquad J_{n+1}(\alpha) = \int_0^{\alpha} J_n(\alpha - \beta) \frac{J_1(\beta)}{\beta} d\beta,$$

où J_n représente la fonction cylindrique de première espèce, pour n positif et impair. Cherchons à présent à démontrer cette formule directement, n étant un nombre entier positif quelconque.

(*) Séance du 28 décembre 1904.

Posons, pour y arriver,

$$P_n = \int_0^{\alpha} \frac{J_n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} J_1(\beta) d\beta$$

$$Q_n = \int_0^{\alpha} J_n(\alpha - \beta) \frac{J_1(\beta)}{\beta} d\beta ;$$

alors il est évident que

$$P_1 = Q_1.$$

En différentiant Q_n, le résultat sera différent selon que n est zéro ou plus grand que zéro.

En effet, on trouvera

$$\frac{dQ_0}{d\alpha} = \int_0^{\alpha} \frac{dJ_0(\alpha - \beta)}{d\alpha} \frac{J_1(\beta)}{\beta} d\beta + \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} = - Q_1 + \frac{J_1(\alpha)}{\alpha}$$

dans le premier cas, tandis que dans le second on obtiendra

$$\frac{dQ_n}{d\alpha} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} [J_{n-1}(\alpha - \beta) - J_{n+1}(\alpha - \beta)] \frac{J_1(\beta)}{\beta} d\beta = \frac{1}{2} (Q_{n-1} - Q_{n+1}).$$

Pour obtenir une seconde relation où entrent P_n et Q_n, multiplions l'équation connue

$$J_{n-1}(\alpha - \beta) = \frac{2n}{\alpha - \beta} J_n(\alpha - \beta) - J_n(\alpha - \beta)$$

par $\frac{J_1(\beta)}{\beta} d\beta$ et intégrons entre les limites 0 et α ; on trouve

$$Q_{n-1} = \frac{2n}{\alpha} \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha - \beta} \right] J_n(\alpha - \beta) J_1(\beta) d\beta - Q_{n+1}$$

ou

$$Q_{n-1} + Q_{n+1} = \frac{2n}{\alpha} (P_n + Q_n).$$

En posant $n = 1$ dans ces deux relations et ayant égard à l'équation $P_1 = Q_1$, il vient

$$Q_0 + Q_2 = \frac{4}{\alpha} Q_1$$

$$Q_0 - Q_2 = 2 \frac{dQ_1}{d\alpha}$$

ou

$$Q_0 = \frac{2}{\alpha} Q_1 + \frac{dQ_1}{d\alpha}$$

$$Q_2 = \frac{2}{\alpha} Q_1 - \frac{dQ_1}{d\alpha}.$$

En différentiant la première de ces équations et en introduisant la valeur trouvée pour $\frac{dQ_0}{d\alpha}$, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d^2Q_1}{d\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} \frac{dQ_1}{d\alpha} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) Q_1 = \frac{J_1(\alpha)}{\alpha}.$$

Or, cette équation admet l'intégrale particulière

$$Q_1 = J_2(\alpha),$$

et c'est justement l'intégrale que nous cherchons, parce qu'elle remplit les conditions

$$Q_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dQ_1}{d\alpha} = 0$$

pour $\alpha = 0$. De cette valeur de Q_1 se déduit immédiatement celle de Q_2; en effet,

$$Q_2 = \frac{2}{\alpha} J_2 - \frac{dJ_2}{d\alpha} = J_3(\alpha).$$

Supposons maintenant qu'on a généralement

$$Q_n = J_{n+1}(\alpha);$$

alors la relation

$$\frac{dQ_n}{d\alpha} = \frac{1}{2}(Q_{n-1} - Q_{n+1})$$

montre que l'on aura aussi

$$Q_{n+1} = J_{n+2}(\alpha);$$

par suite, l'équation (1) est établie.

Cette démonstration nous permet en même temps de déterminer la valeur de l'intégrale P_n; en effet,

$$P_n = \frac{\alpha}{2n}(Q_{n-1} + Q_{n+1}) - Q_n = \frac{\alpha}{2n}(J_n + J_{n+2}) - J_{n+1} = \frac{1}{n} J_{n+1}(\alpha)$$

ou

$$\frac{J_{n+1}(\alpha)}{n} = \int_0^\alpha \frac{J_n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} J_1(\beta)\, d\beta. \tag{2}$$

2. Les formules (1) et (2) ne sont que des cas particuliers des formules plus générales :

$$\frac{J_{n+k}(\alpha)}{n} = \int_0^\alpha \frac{J_n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} J_k(\beta)\, d\beta = R_n, \tag{3}$$

$$\frac{J_{n+k}(\alpha)}{k} = \int_0^\alpha J_n(\alpha - \beta) \frac{J_k(\beta)}{\beta}\, d\beta = S_n, \tag{4}$$

k étant un nombre entier positif quelconque, excepté la valeur $k = 0$, qui dans la dernière de ces formules n'est pas admissible.

Pour les démontrer, différentions d'abord l'intégrale S_n; alors on aura

$$\frac{dS_n}{d\alpha} = \frac{1}{2}(S_{n-1} - S_{n+1}). \tag{a}$$

Une seconde relation se déduira ensuite de l'identité connue

$$J_{n-1}(\alpha - \beta) + J_{n+1}(\alpha - \beta) = \frac{2n}{\alpha - \beta} J_n(\alpha - \beta).$$

En effet, en multipliant cette équation par $\frac{J_k(\beta)}{\beta}\,d\beta$ et en intégrant entre les limites 0 et α, on trouve

$$(b) \qquad S_{n-1} + S_{n+1} = \frac{2n}{\alpha}(S_n + R_n).$$

Or, d'après les formules (3) et (4), on a

$$R_1 = \int_0^\alpha \frac{J_1(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} J_k(\beta)\,d\beta = \int_0^\alpha \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} J_k(\alpha-\gamma)\,d\gamma = J_{k+1}$$

$$S_1 = \int_0^\alpha J_1(\alpha-\beta)\frac{J_k(\beta)}{\beta}\,d\beta = \int_0^\alpha J_1(\gamma)\frac{J_k(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}\,d\gamma = \frac{J_{k+1}}{k},$$

et, d'après les équations (a) et (b),

$$S_0 - S_2 = 2\frac{dS_1}{d\alpha}$$

$$S_0 + S_2 = \frac{2}{\alpha}(S_1 + R_1) = \frac{2(k+1)}{\alpha}S_1;$$

par suite,

$$S_0 = \frac{k+1}{\alpha}S_1 + \frac{dS_1}{d\alpha} = \frac{J_k}{k}$$

$$S_2 = \frac{k+1}{\alpha}S_1 - \frac{dS_1}{d\alpha} = \frac{J_{k+2}}{k}.$$

En introduisant ces valeurs, les relations récurrentes (a) et (b) donnent successivement

$$S_3 = \frac{J_{k+3}}{k}$$

$$S_4 = \frac{J_{k+4}}{k}$$

. . . .

$$S_n = \frac{J_{k+n}}{k},$$

et de la même manière

$$R_2 = \frac{J_{k+2}}{2}$$

$$R_3 = \frac{J_{k+3}}{3}$$

. . . .

$$R_n = \frac{J_{k+n}}{n}.$$

3. Déterminons maintenant l'intégrale

$$\int_0^\alpha J_0(\alpha - \beta) J_n(\beta)\, d\beta,$$

qui est en rapport intime avec l'intégrale

$$\int_0^\alpha \sin(\alpha - \beta) \frac{J_n(\beta)}{\beta}\, d\beta.$$

Il importe ici de distinguer les deux cas $n = 2k$ et $n = 2k + 1$. Dans ces deux cas, on aura respectivement

$$(5) \quad \int_0^\alpha J_0(\alpha - \beta) J_{2k}(\beta) d\beta = 2[J_{2k-1} - J_{2k-3} + \cdots - (-1)^k J_1] + (-1)^k \sin\alpha$$

$$(6) \quad \int_0^\alpha J_0(\alpha - \beta) J_{2k+1}(\beta) d\beta = 2\left[J_{2k} - J_{2k-2} + \cdots + (-1)^k \frac{J_0}{2}\right] - (-1)^k \cos\alpha.$$

Soit

$$u = \int_0^\alpha J_0(\alpha - \beta) J_n(\beta)\, d\beta;$$

alors on aura

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^\alpha \frac{dJ_0(\alpha - \beta)}{d\alpha} J_n(\beta)\, d\beta + J_n(\alpha)$$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = \int_0^\alpha \frac{d^2 J_0(\alpha - \beta)}{d\alpha^2} J_n(\beta)\, d\beta + \frac{dJ_n(\alpha)}{d\alpha}.$$

Or,

$$\frac{d^2 J_0(\alpha-\beta)}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha-\beta}\frac{dJ_0(\alpha-\beta)}{d\alpha} + J_0(\alpha-\beta) = 0$$

ou

$$\frac{d^2 J_0(\alpha-\beta)}{d\alpha^2} + J_0(\alpha-\beta) = \frac{J_1(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta};$$

par suite,

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = \int_0^\alpha \frac{J_1(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} J_n(\beta)\,d\beta + \frac{dJ_n(\alpha)}{d\alpha}.$$

D'après l'équation (3), cette équation différentielle s'écrit plus simplement

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = J_{n+1} + \frac{1}{2}[J_{n-1} - J_{n+1}] = \frac{nJ_n(\alpha)}{\alpha}.$$

En introduisant dans l'intégrale générale

$$u = A\sin\alpha + B\cos\alpha + n\int_0^\alpha \sin(\alpha-\beta)\frac{J_n(\beta)}{\beta}\,d\beta$$

les conditions évidentes

$$\alpha = 0 : u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 1 \text{ quand } n = 0,$$

$$\alpha = 0 : u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0 \text{ quand } n > 0,$$

on trouve aisément

$$\int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)J_0(\beta)\,d\beta = \sin\alpha$$

$$\int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)J_n(\beta)\,d\beta = n\int_0^\alpha \sin(\alpha-\beta)\frac{J_n(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

En différentiant la première de ces équations, on obtient, après une légère réduction,

$$\int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)J_1(\beta)\,d\beta = J_0(\alpha) - \cos\alpha.$$

De ces deux formules se déduiront successivement toutes les autres; en effet,

$$\int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)J_2(\beta)d\beta = \int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)\left[\frac{2J_1}{\beta}-J_0\right]d\beta = 2J_1(\alpha)-\sin\alpha$$

$$\int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)J_3(\beta)d\beta = \int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)\left[\frac{4J_2}{\beta}-J_1\right]d\beta = 2J_2-J_0+\cos\alpha,$$

etc., ce qui prouve les formules (5) et (6).

4. Cherchons à présent la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\alpha \sin(\alpha-\beta)J_n(\beta)d\beta.$$

Pour y arriver, nous démontrerons d'abord la formule

$$(7) \qquad \int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)\cos\beta d\beta = \alpha J_0(\alpha).$$

En posant

$$u = \int_0^\alpha J_0(\alpha-\beta)\cos\beta d\beta = \int_0^\alpha J_0(\gamma)\cos(\alpha-\gamma)d\gamma,$$

on aura, par différentiation,

$$(a) \qquad \frac{du}{d\alpha} = -\int_0^\alpha J_0(\gamma)\sin(\alpha-\gamma)d\gamma + J_0(\alpha)$$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -\int_0^\alpha J_0(\gamma)\cos(\alpha-\gamma)d\gamma + \frac{dJ_0(\alpha)}{d\alpha};$$

par suite,

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = -J_1(\alpha).$$

Cette équation admet l'intégrale $u = \alpha J_0(\alpha)$, et c'est précisément l'intégrale cherchée, parce qu'elle remplit les conditions que pour $\alpha = 0$ on a $u = 0$ et $\frac{du}{d\alpha} = 1$.

Si maintenant nous substituons $u = \alpha J_0(\alpha)$ dans l'équation (a), il vient

$$(b) \qquad \int_0^\alpha J_0(\gamma) \sin(\alpha - \gamma)\, d\gamma = \alpha J_1(\alpha)$$

ou

$$(8) \qquad \int_0^\alpha J_0(\alpha - \beta) \sin\beta\, d\beta = \alpha J_1(\alpha).$$

En différentiant l'équation (8), on obtient

$$\int_0^\alpha J_1(\alpha - \beta) \sin\beta\, d\beta = \sin\alpha - \alpha J_0(\alpha)$$

ou

$$(c) \qquad \int_0^\alpha J_1(\gamma) \sin(\alpha - \gamma)\, d\gamma = \sin\alpha - \alpha J_0(\alpha).$$

Cette équation (c) avec l'équation (b) suffit pour calculer l'intégrale

$$\int_0^\alpha \sin(\alpha - \beta) J_n(\beta)\, d\beta.$$

En effet, on aura la relation récurrente

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \sin(\alpha - \beta) J_n(\beta)\, d\beta &= 2(n-1) \int_0^\alpha \frac{J_{n-1}(\beta)}{\beta} \sin(\alpha - \beta)\, d\beta \\ &\quad - \int_0^\alpha \sin(\alpha - \beta) J_{n-2}(\beta)\, d\beta \\ &= 2 \int_0^\alpha J_0(\alpha - \beta) J_{n-1}(\beta)\, d\beta \\ &\quad - \int_0^\alpha \sin(\alpha - \beta) J_{n-2}(\beta)\, d\beta,\end{aligned}$$

où l'intégrale

$$\int_0^{\alpha} J_0(\alpha - \beta) J_{n-1}(\beta)\, d\beta$$

est connue d'après le paragraphe précédent.

5. Considérons en dernier lieu l'intégrale

$$\int_0^{\infty} J_n(\beta) \cdot \frac{J_k(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^k}\, d\beta = H_{n,k}.$$

D'après la formule connue

$$J_k(x) = \frac{2x^k}{\pi . 1.3 \ldots (2k-1)} \int_0^1 \cos(xz)(1 - z^2)^{k-\frac{1}{2}}\, dz,$$

on aura

$$H_{n,k} = \frac{2}{\pi . 1.3 \ldots (2k-1)} \int_0^{\infty} J_n(\beta)\, d\beta \int_0^1 \cos(\alpha z - \beta z)(1 - z^2)^{k-\frac{1}{2}} dz.$$

Or, on sait (*) que

$$\int_0^{\infty} J_n(\beta) \cos(\beta z)\, dz = \frac{\cos(n \arcsin z)}{\sqrt{1 - z^2}} \qquad 0 < z < 1$$

$$\int_0^{\infty} J_n(\beta) \sin(\beta z)\, dz = \frac{\sin(n \arcsin z)}{\sqrt{1 - z^2}} \qquad 0 < z < 1$$

par suite, en posant

$$z = \sin \varphi,$$

$$H_{n,k} = \frac{2}{\pi . 1.3 \ldots (2k-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(\alpha \sin \varphi) \cos n\varphi + \sin(\alpha \sin \varphi) \sin n\varphi] \cos^{2k-1} \varphi\, d\varphi.$$

(*) Nielsen, *Handbuch der Cylinderfunctionen*, p. 195.

On a

$$\cos n\varphi \cos^{2k-1}\varphi = \frac{\cos n\varphi}{2^{2k-2}}\left[\cos(2k-1)\varphi + \frac{2k-1}{1}\cos(2k-3)\varphi\right.$$
$$\left. + \cdots \frac{(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\cos\varphi\right]$$
$$= \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\cos(n+2k-1)\varphi + \frac{2k-1}{1}\cos(n+2k-3)\varphi\right.$$
$$+ \cdots \frac{(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\cos(n+1)\varphi$$
$$+ \cos(n-2k+1)\varphi + \frac{2k-1}{1}\cos(n-2k+3)\varphi$$
$$\left. + \cdots \frac{(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\cos(n-1)\varphi\right],$$

$$\sin n\varphi \cos^{2k-1}\varphi = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\sin(n+2k-1)\varphi + \frac{2k-1}{1}\sin(n+2k-3)\varphi\right.$$
$$+ \cdots \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\sin(n+1)\varphi$$
$$+ \sin(n-2k+1)\varphi + \frac{2k-1}{1}\sin(n-2k+3)\varphi$$
$$\left. + \cdots \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}\sin(n-1)\varphi\right].$$

Si donc on introduit les fonctions (*)

$$\Lambda_{2m} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha\sin\varphi)\sin(2m\varphi)\,d\varphi$$

$$\Lambda_{2m+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha\sin\varphi)\cos(2m+1)\varphi\,d\varphi,$$

(*) Nielsen, *loc. cit.*, p. 61.

l'intégrale cherchée prend la forme

$$(9)\quad H_{n,k} = \frac{1}{1.3\ldots(2k-1)}\frac{1}{2^{2k-1}}\Big[(J_{n+2k-1} + J_{n-2k+1} + \Lambda_{n+2k-1} + \Lambda_{n-2k+1}) + \frac{2k-1}{1}(J_{n+2k-3} + J_{n-2k+3} + \Lambda_{n+2k-3} + \Lambda_{n-2k+3}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}(J_{n+1} + J_{n-1} + \Lambda_{n+1} + \Lambda_{n-1})\Big]$$

où les fonctions Λ se réduisent à des fonctions élémentaires.

De cette manière, on a, par exemple,

$$H_{0,1} = \frac{1}{2}(J_1 + J_{-1} + \Lambda_1 + \Lambda_{-1}) = \frac{1}{2}(\Lambda_1 + \Lambda_{-1}) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

et, n étant un nombre impair,

$$H_{n,k}(\alpha) + H_{n,k}(-\alpha) = \frac{1}{1.3\ldots(2k-1)}\cdot\frac{1}{2^{2k-2}} \times \Big[(J_{n+2k-1} + J_{n-2k+1}) + \frac{2k-1}{1}(J_{n+2k-3} + J_{n-2k+3}) + \frac{(2k-1)(2k-2)\ldots(k+1)}{1.2\ldots(k-1)}(J_{n+1} + J_{n-1})\Big].$$

SECONDE PARTIE

6. Avant d'appliquer les résultats précédents à la sommation de certaines séries, nous écrirons quelques cas particuliers de la formule connue (*)

$$J_k(x+p) = J_k(p)J_0(x) + \sum_{s=1}^{\infty}[J_{k-s}(p) + (-1)^s J_{k+s}(p)]J_s(x).$$

(*) Nielsen, *loc. cit.*, p. 287.

En posant $k = 0, 1, 2$, on obtient successivement

$$J_0(x+p) - J_0(x-p) = -4\sum_{1.3}^{\infty} J_n(p)J_n(x) = -4\sum_{1.3}^{\infty} J_n J_n(x)$$

$$J_1(x+p) + J_1(x-p) = 2\sum_{1.3}^{\infty}(J_{n-1} - J_{n+1})J_n(x)$$

$$= 2\sum_{1.3}^{\infty}(J_{n-1} + J_{n+1} - 2J_{n+1})J_n(x)$$

$$= \frac{4}{\alpha}\sum_{1.3}^{\infty} nJ_nJ_n(x) - 4\sum_{1.3}^{\infty} J_{n+1}J_n(x)$$

$$J_2(x+p) - J_2(x-p) = 2J_1J_1(x) - 2\sum_{1.3}^{\infty}[J_n J_{n+2}(x) + J_{n+2}J_n(x)]$$

$$= 2J_1J_1(x) - 2\sum_{2.4}^{\infty}[J_{n-1}J_{n+1}(x) + J_{n+1}J_{n-1}(x)]$$

$$= 2\sum_{2.4}^{\infty}[J_{n-1}J_{n-1}(x) - J_{n+1}J_{n+1}(x)]$$

$$-2\sum_{2.4}^{\infty}[J_{n-1}J_{n+1}(x) + J_{n+1}J_{n-1}(x)].$$

Pour déterminer en premier lieu la somme de la série

$$\sum_{1.3}^{\infty} nJ_n(\alpha)J_n(x),$$

multiplions l'équation

$$J_0(x-\alpha+\beta) - J_0(x+\alpha-\beta) = 4\sum_{1.3}^{\infty} J_n(\alpha-\beta)J_n(x)$$

par $\frac{J_1(\beta)}{\beta}d\beta$ et intégrons entre les limites 0 et α. De cette manière, on obtient, d'après la formule (1),

$$\sum_{1.3}^{\infty} J_{n+1}(\alpha)J_n(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\alpha}\frac{J_1(\beta)}{\beta}[J_0(x-\alpha+\beta) - J_0(x+\alpha-\beta)]d\beta.$$

En ajoutant à cette équation

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{1.3}^{\infty} nJ_n(\alpha)J_n(x) - \sum_{1.3}^{\infty} J_{n+1}(\alpha)J_n(x) = \frac{1}{4}[J_1(x-\alpha) + J_1(x+\alpha)],$$

on trouve la somme cherchée

$$\sum_{1.3}^{\infty} n\,J_n(\alpha)\,J_n(x) = \frac{\alpha}{4}\left[J_1(x-\alpha) + J_1(x+\alpha)\right] + \frac{\alpha}{4}\int_0^{\infty} \frac{J_1(\beta)}{\beta}\left[J_0(x-\alpha+\beta) - J_0(x+\alpha-\beta)\right] d\beta.$$

Ce résultat prend une forme plus simple si l'on écrit, d'après la formule (1),

$$J_1(x-\alpha) = \int_0^{x-\alpha} J_0(x-\alpha-\beta)\frac{J_1(\beta)}{\beta}\,d\beta$$

$$= -\int_0^{\alpha-x} J_0(x-\alpha+\beta)\,\frac{J_1(\beta)}{\beta}\,d\beta$$

$$J_1(x+\alpha) = \int_0^{x+\alpha} J_0(x+\alpha-\beta)\frac{J_1(\beta)}{\beta}\,d\beta$$

En substituant ces valeurs, il viendra

$$\sum_{1.3}^{\infty} nJ_n(\alpha)J_n(x)$$

$$= \frac{\alpha}{4}\left[\int_{\alpha-x}^{\alpha} J_0(x-\alpha+\beta)\frac{J_1(\beta)}{\beta}\,d\beta + \int_{\alpha}^{\alpha+x} J_0(x+\alpha-\beta)\frac{J_1(\beta)}{\beta}\,d\beta\right]$$

ou, en posant successivement

$$\beta = \alpha - \gamma \text{ et } \beta = \alpha + \gamma,$$

$$(10)\quad \sum_{1.3}^{\infty} nJ_n(\alpha)J_n(x) = \frac{\alpha}{4}\int_0^{x} J_0(x-\gamma)\left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right] d\gamma.$$

Il est évident que cette équation aura lieu pour toutes les valeurs réelles des variables α et x. En attribuant à α une valeur positive très grande, on en déduira aisément

$$\sum_{1.3}^{\infty} n\sin\frac{n\pi}{2}\,J_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x} J_0(x-\gamma)\cos\gamma\,d\gamma.$$

Or, le premier membre de cette équation ayant la valeur $\frac{x}{2}J_0(x)$ (*), on retrouve la formule (7).

7. Considérons, en second lieu, la somme de la série

$$\sum_{2.4}^{\infty} nJ_n(\alpha)J_n(x).$$

En multipliant ici l'équation

$$J_0(x-\alpha+\beta)-J_0(x+\alpha-\beta)=4\sum_{1.3}^{\infty}J_n(\alpha-\beta)J_n(x)$$

par $\frac{J_2(\beta)}{\beta}d\beta$ et en intégrant entre les limites 0 et α, on obtiendra, d'après la formule (3),

$$\int_0^{\alpha}\frac{J_2(\beta)}{\beta}[J_0(x-\alpha+\beta)-J_0(x+\alpha-\beta)]d\beta=2\sum_{1.3}^{\infty}J_{n+2}(\alpha)J_n(x)$$

ou

$$\frac{\alpha}{4}\int_0^{\alpha}\frac{J_2(\beta)}{\beta}[J_0(x-\alpha+\beta)-J_0(x+\alpha-\beta)]d\beta=\frac{\alpha}{2}\sum_{2.4}^{\infty}J_{n+1}(\alpha)J_{n-1}(x).$$

En ajoutant à cette équation

$$\frac{\alpha}{8}[J_2(x+\alpha)-J_2(x-\alpha)]=\frac{\alpha}{4}\sum_{2.4}^{\infty}[J_{n-1}J_{n-1}(x)-J_{n+1}J_{n+1}(x)$$
$$-J_{n-1}J_{n+1}(x)-J_{n+1}J_{n-1}(x)],$$

on arrivera, dans le second membre, à

$$\frac{\alpha}{4}\sum_{2.4}^{\infty}(J_{n-1}+J_{n+1})[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{2.4}^{\infty}nJ_n(\alpha)[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]=\sum_{2.4}^{\infty}nJ_n(\alpha)\frac{dJ_n(x)}{dx},$$

(*) Lommel, *Studien über die Besselschen Functionen*, p. 40.

par suite, on trouve

$$\sum_{2.4}^{\infty} n\mathrm{J}_n(\alpha)\frac{d\mathrm{J}_n(x)}{dx} = \frac{\alpha}{8}[\mathrm{J}_2(x+\alpha) - \mathrm{J}_2(x-\alpha)]$$
$$+\frac{\alpha}{4}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{J}_2(\beta)}{\beta}[\mathrm{J}_0(x-\alpha+\beta) - \mathrm{J}_0(x+\alpha-\beta)]d\beta$$

ou, en réduisant comme au paragraphe précédent,

$$\sum_{2.4}^{\infty} n\mathrm{J}_n(\alpha)\frac{d\mathrm{J}_n(x)}{dx} = \frac{\alpha}{4}\int_0^{x}\mathrm{J}_0(x-\gamma)\left[\frac{\mathrm{J}_2(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{\mathrm{J}_2(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma.$$

En intégrant entre les limites 0 et x, on aura, enfin,

$$(11)\quad \sum_{2.4}^{\infty} n\mathrm{J}_n(\alpha)\mathrm{J}_n(x) = \frac{\alpha}{4}\int_0^{x}dx\int_0^{x}\mathrm{J}_0(x-\gamma)\left[\frac{\mathrm{J}_2(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{\mathrm{J}_2(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma.$$

Si l'on attribue à α une valeur positive très grande, on obtiendra ici la formule

$$\sum_{2.4}^{\infty} n\cos\frac{n\pi}{2}\mathrm{J}_n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^{x}x\mathrm{J}_0(x)\,dx.$$

8. Si l'on connaît une série

$$(12)\qquad f(\beta) = c_0\mathrm{J}_0(\beta) + c_1\mathrm{J}_1(\beta) + c_2\mathrm{J}_2(\beta) + \cdots,$$

on en déduira une autre, ayant les mêmes coefficients, en appliquant la relation (3). En effet, on aura

$$(12)^{\text{bis}}\qquad n\int_0^{x}f(\beta)\frac{\mathrm{J}_n(x-\beta)}{x-\beta}\,d\beta = c_0\mathrm{J}_n(x) + c_1\mathrm{J}_{n+1}(x) + \cdots$$

De la même manière, en appliquant la formule (4), on déduira de l'équation connue

$$(13)\qquad \mathrm{F}(\beta) = c_1\mathrm{J}_1(\beta) + c_2\mathrm{J}_2(\beta) + c_3\mathrm{J}_3(\beta) + \cdots$$

cette autre formule

$$(13)^{\text{bis}} \qquad \int_0^x F(\beta)\frac{J_n(x-\beta)}{\beta}\,d\beta = c_1\frac{J_{n+1}(x)}{1} + c_2\frac{J_{n+2}(x)}{2} + \cdots$$

C'est ainsi que de l'équation

$$J_0(\beta) - \cos\beta = 2[J_2(\beta) - J_4(\beta) + J_6(\beta) - \cdots]$$

on déduit

$$\int_0^x \frac{J_0(x-\beta)}{\beta}[J_0(\beta) - \cos\beta]\,d\beta = 2\left[\frac{J_2(x)}{2} - \frac{J_4(x)}{4} + \cdots\right]$$

ou, en introduisant la fonction cylindrique de seconde espèce,

$$Y_0(x) - J_0\log x = 2\left[J_2(x) - \frac{J_4(x)}{2} + \frac{J_6(x)}{3} - \cdots\right]$$

$$Y_0(x) - J_0\log(x) = 2\int_0^x \frac{J_0(x-\beta)}{\beta}[J_0(\beta) - \cos\beta]\,d\beta.$$

9. Si l'on prend

$$\beta\varphi(\beta) = c_1J_1(\beta) + 2c_2J_2(\beta) + 3c_3J_3(\beta) + \cdots,$$

on aura, d'après les formules (13) et (13^{bis}) du paragraphe précédent,

$$(14) \qquad f(x) = c_1J_1(x) + c_2J_2(x) + \cdots = \int_0^x \varphi(\beta)J_0(x-\beta)\,d\beta.$$

Cela étant, nous nous proposons de déterminer $\varphi(x)$, quand la fonction $f(x)$ est donnée.

En différentiant l'équation

$$f(\beta) = c_1J_1(\beta) + c_2J_2(\beta) + c_3J_3(\beta) + \cdots,$$

il vient

$$\frac{df(\beta)}{d\beta} = c_1\frac{J_0 - J_2}{2} + c_2\frac{J_1 - J_3}{2} + c_3\frac{J_2 - J_4}{2} + \cdots$$

ou

$$2\frac{df(\beta)}{d\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_{k-1}(\beta) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_{k+1}(\beta).$$

Or, d'après l'équation (3),

$$\int_0^x f(\beta)\frac{J_1(x-\beta)}{x-\beta}\,d\beta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_{k+1}(x),$$

par suite

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_{k-1}(x) = 2\frac{df(x)}{dx} + \int_0^x f(\beta)\frac{J_1(x-\beta)}{x-\beta}\,d\beta.$$

En ajoutant l'équation suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k J_{k+1}(x) = \int_0^x f(\beta)\frac{J_1(x-\beta)}{x-\beta}\,d\beta,$$

on aura

$$\frac{2}{x}\sum_{1}^{\infty} k c_k J_k(x) = 2\frac{df}{dx} + 2\int_0^x f(\beta)\frac{J_1(x-\beta)}{x-\beta}\,d\beta$$

ou, ayant égard à la définition de la fonction $\varphi(x)$,

$$(14)^{bis} \qquad \varphi(x) = \frac{df}{dx} + \int_0^x f(\beta)\frac{J_1(x-\beta)}{x-\beta}\,d\beta.$$

Pour appliquer ce résultat, posons, d'après l'équation (10),

$$f(x) = \sum_{1.3}^{\infty} n J_n(\alpha) J_n(x) = \frac{\alpha}{4}\int_0^x J_0(x-\gamma)\left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma$$

et calculons le second membre de l'équation (14^{bis}).

Nous aurons d'abord

$$\frac{df}{dx} = \frac{\alpha}{4}\left[\frac{J_1(x-\alpha)}{x-\alpha} + \frac{J_1(x+\alpha)}{x+\alpha}\right]$$
$$-\frac{\alpha}{4}\int_0^x J_1(x-\gamma)\left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma$$

et ensuite

$$\int_0^x f(\beta)\frac{J_1(x-\beta)}{x-\beta}d\beta = \int_0^x f(x-\beta)\frac{J_1(\beta)}{\beta}d\beta$$

$$= \frac{\alpha}{4}\int_0^x \frac{J_1(\beta)}{\beta}d\beta \int_0^{x-\beta} J_0(x-\beta-\gamma)\left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}+\frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma.$$

En posant

$$x-\gamma = t,$$

le dernier membre s'écrit

$$\frac{\alpha}{4}\int_0^x \frac{J_1(\beta)}{\beta}d\beta \int_\beta^x J_0(\beta-t)\left[\frac{J_1(\alpha-x+t)}{\alpha-x+t}+\frac{J_1(\alpha+x-t)}{\alpha+x-t}\right]dt$$

ou, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\frac{\alpha}{4}\int_0^x \left[\frac{J_1(\alpha-x+t)}{\alpha-x+t}+\frac{J_1(\alpha+x-t)}{\alpha+x-t}\right]dt \int_0^t \frac{J_1(\beta)}{\beta}J_0(\beta-t)\,d\beta,$$

ou encore d'après la formule (1)

$$\frac{\alpha}{4}\int_0^x \left[\frac{J_1(\alpha-x+t)}{\alpha-x+t}+\frac{J_1(\alpha+x-t)}{\alpha+x-t}\right]J_1(t)\,dt.$$

Si maintenant on remplace de nouveau t par $x-\gamma$, on obtient la valeur

$$\frac{\alpha}{4}\int_0^x J_1(x-\gamma)\left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}+\frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma}\right]d\gamma.$$

En réunissant les résultats précédents, on voit que la fonction $\varphi(x)$ prend la forme simple

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{4}\left[\frac{J_1(x-\alpha)}{x-\alpha}+\frac{J_1(x+\alpha)}{x+\alpha}\right],$$

ce qui se traduit par l'équation suivante

$$(15)\qquad \sum_{1}^{\infty} n^2 J_n(\alpha)J_n(x) = \frac{\alpha x}{4}\left[\frac{J_1(x-\alpha)}{x-\alpha}+\frac{J_1(x+\alpha)}{x+\alpha}\right].$$

10. Considérons, en dernier lieu, la somme de la série

$$S = c_1 J_1(x) + c_3 J_3(x) + c_5 J_5(x) + \cdots,$$

où nous attribuons aux coefficients les valeurs

$$c_n = 2n \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} J_n(\alpha)\, d\alpha,$$

en désignant par $\varphi(\alpha)$ une fonction impaire telle que cette intégrale ait un sens.

Il s'ensuit que

$$S = 2 \int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \sum_{1,3}^{\infty} n J_n(\alpha) J_n(x)\, d\alpha$$

ou, en introduisant la formule (10),

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi(\alpha) d\alpha \int_0^x J_0(x-\gamma) \left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma} \right] d\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x J_0(x-\gamma)\, d\gamma \,.\, M,$$

en posant

$$M = \int_0^\infty \varphi(\alpha) \left[\frac{J_1(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} + \frac{J_1(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma} \right] d\alpha.$$

Or, d'après notre hypothèse,

$$\varphi(\alpha) = -\varphi(-\alpha),$$

par suite

$$M = \int^\infty \frac{J_1(t)}{t} [\varphi(t+\gamma) + \varphi(t-\gamma)]\, dt + 2 \int_0^\gamma \varphi(\gamma - t) \frac{J_1(t)}{t}\, dt.$$

Cherchons maintenant à simplifier l'intégrale double

$$\int^x J_0(x-\gamma)\, d\gamma \int_0^\gamma \varphi(\gamma - t) \frac{J_1(t)}{t}\, dt.$$

Pour y arriver, intervertissons l'ordre des intégrations. Cela conduit à l'intégrale double

$$\int_0^x \frac{J_1(t)}{t}\,dt \int_t^x J_0(x-\gamma)\varphi(\gamma-t)\,d\gamma$$

ou, en substituant

$$\gamma = x + t - \beta,$$

à la forme

$$\int_0^x \frac{J_1(t)}{t}\,dt \int_t^x J_0(\beta-t)\varphi(x-\beta)\,d\beta.$$

En intervertissant de nouveau l'ordre des intégrations, on obtiendra

$$\int_0^x \varphi(x-\beta)\,d\beta \int_0^\beta J_0(\beta-t)\frac{J_1(t)}{t}\,dt$$

ou, d'après la formule (1),

$$\int_0^x \varphi(x-\beta)J_1(\beta)\,d\beta.$$

De cette manière, la somme cherchée prend la forme

$$S = \frac{1}{2}\int_0^x J_0(x-\gamma)\,d\gamma \int_0^\infty \frac{J_1(t)}{t}[\varphi(t+\gamma)+\varphi(t-\gamma)]\,d\gamma + \int_0^x \varphi(x-\beta)\,J_1(\beta)\,d\beta.$$

Observons maintenant qu'il y a des cas assez étendus où l'on a

$$\int_0^\infty \frac{J_1(t)}{t}[\varphi(t+\gamma)+\varphi(t-\gamma)]\,dt = 2\,\frac{d\varphi(\gamma)}{d\gamma},$$

et qu'alors la somme cherchée s'écrit

$$S = \int_0^x J_0(x-\gamma)\,\frac{d\varphi(\gamma)}{d\gamma}\,d\gamma + \int_0^x \varphi(x-\beta)\,J_1(\beta)\,d\beta.$$

En intégrant la première intégrale par parties et en supposant encore que $\varphi(0) = 0$, on voit que le second membre de cette équation se réduit simplement à $\varphi(x)$.

TRAJECTOIRE LUMINEUSE

ET

DISTANCE ZÉNITHALE

DANS

UNE ATMOSPHÈRE FORMÉE DE COUCHES PLANES PARALLÈLES

PAR

G. CESÀRO

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Trajectoires lumineuses dans une atmosphère formée de couches planes, horizontales, ayant la même température, et dont la densité et l'indice varient d'après les lois de Mariotte et de Gladstone.

Nous considérons un point lumineux O (fig. 1) situé dans une couche d'indice N, de pression H et de densité D, rayonnant tout autour de lui; l'atmosphère est supposée indéfinie dans tous les sens. Il s'agit de trouver ce que deviennent les différents rayons émis par le point O dans la traversée de l'atmosphère. Nous prenons comme axe des y la verticale passant par O; comme le tout est de révolution autour de y, il suffira de considérer les rayons situés dans une section méridienne quelconque, dont nous prenons l'horizontale pour axe des x. Soit φ l'angle que fait un rayon émanant de O avec la verticale; désignons en un point quelconque (x, y) de la trajectoire par n l'indice, par h la pression, par z le poids du litre d'air et par α l'angle que la tangente y fait avec la verticale. Pour deux éléments consécutifs de la trajectoire on a, d'après les lois de la réfraction,

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$$

ou

$$n \sin \alpha = \text{constante} = \text{N} \sin \varphi. \qquad (1)$$

La courbe est donc définie par la propriété, qu'en un point quelconque le produit de l'indice variable par le sinus de l'angle que la tangente fait avec la verticale est constant.

La diminution de pression pour une augmentation dy de la hauteur est proportionnelle à zdy, de sorte que

$$dh = -Czdy; \qquad (2)$$

et, comme

$$\frac{h}{H} = \frac{z}{D},$$

$$dh = -\frac{CD}{H} \cdot h dy;$$

puis, en posant

$$\frac{CD}{H} = k,$$

$$h = He^{-ky} \quad \text{et} \quad z = De^{-ky}.$$

Il reste à calculer l'indice en fonction de la hauteur : la loi de Gladstone dit que *pour un même corps le quotient* $\frac{n-1}{d}$, n étant l'indice, d la densité, *est une quantité constante;* quelle que soit la cause qui fait varier d, même s'il s'agit du changement d'état physique, n varie dans le même sens de manière à laisser constant le quotient $\frac{n-1}{d}$, qui porte le nom d'*énergie réfractive* du corps. On a donc, dans notre cas,

$$\frac{n-1}{z} = \frac{N-1}{D},$$

$$n = 1 + (N-1)e^{-ky}.$$

En remplaçant dans (1), il vient

$$1 + (N-1)e^{-ky} = N \sin \varphi \sqrt{1 + y'^2};$$

d'où, en posant

$$N \sin \varphi = a, \quad N - 1 = b,$$

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{(1 + be^{-ky})^2 - a^2}}. \tag{3}$$

En intégrant, on trouve qu'il y a trois cas à distinguer :

$$a < 1, \quad a = 1, \quad a > 1.$$

PREMIER CAS

$$a = \mathrm{N}\sin\varphi < 1, \quad \varphi\,(*) < 88^\circ\,36'\,53'',4.$$

On obtient

$$x + c = \frac{a}{k\sqrt{1-a^2}}\, l\, \frac{\sqrt{1+a}\sqrt{1-a+be^{-ky}} + \sqrt{1-a}\sqrt{1+a+be^{-ky}}}{\sqrt{1+a}\sqrt{1-a+be^{-ky}} - \sqrt{1-a}\sqrt{1+a+be^{-ky}}}; \quad (4)$$

en posant

$$\frac{k\sqrt{1-a^2}}{a} = m, \quad a = \mathrm{N}\sin\varphi = \sin u,$$

la constante c est donnée par

$$e^{mc} = \frac{\cos\dfrac{u+\varphi}{2}}{\sin\dfrac{u-\varphi}{2}}. \quad (5)$$

En tirant de (4) y en fonction de x, il vient

$$e^{ky} = \frac{b}{1-a^2}\left[\left\{\frac{a}{2}\right\}e^{m(x+c)} + e^{-m(x+c)}\right\} - 1\right]. \quad (6)$$

La forme de la trajectoire se déduit aisément de cette équation : la dérivée

$$y' = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\cdot\frac{e^{m(x+c)} - e^{m(x+c)}}{e^{m(x+c)} + e^{-m(x+c)} - \dfrac{2}{a}}$$

constamment positive, décroit depuis

$$\cot\varphi \quad \text{à} \quad \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

lorsque x croit de 0 à $+\infty$.

(*) En supposant la température de 0° et la pression au point O de 760 millimètres, N = 1,0002923.

La courbe (fig. 1) tourne constamment sa convexité vers le haut; elle a une asymptote

$$y = px + q,$$

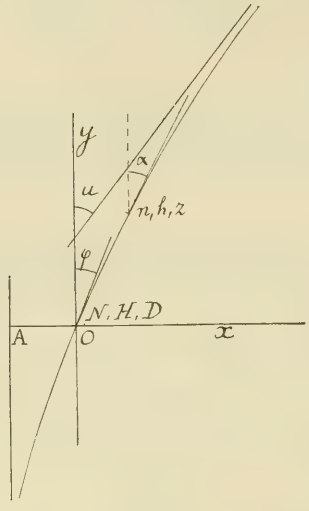


Fig. 1.

dont le coefficient angulaire vient d'être obtenu :

$$p = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \cot u; \tag{7}$$

quant à son ordonnée à l'origine, on a

$$q = \lim (y - px)_{x=\infty};$$

or

$$y - px = \frac{1}{k} l \left[\frac{b}{1-a^2} \left\{ \frac{a}{2} \left(e^{m(x+c)} + e^{-m(x+c)} \right) - 1 \right\} \right] - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x,$$

ou bien

$$y - px = \frac{1}{k} l \left[\frac{b}{1-a^2} \left\{ \frac{a}{2} \left(e^{mc} + e^{-m(2x+c)} \right) - e^{-mx} \right] \right. \text{(*)}$$

(*) La première valeur de $y - px$ devient indéterminée pour $x = \infty$; on fait disparaître cette indétermination, en observant que

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x = \frac{1}{k} l e^{mx}.$$

et, par conséquent,

$$q = \frac{1}{k} l \frac{abe^{mc}}{2(1-a^2)}. \qquad (8)$$

Pour x négatif, la courbe représente la trajectoire suivie par un rayon lumineux partant sous l'angle $\varphi < 88°36'53''4$ vers les couches atmosphériques inférieures. L'équation (4) montre que lorsque y tend vers $-\infty$, x tend vers une valeur finie donnée par

$$x + c = \frac{1}{m} l \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} = \frac{1}{m} l \cot \frac{u}{2}; \qquad (9)$$

cette branche de courbe a donc une asymptote verticale.

Calcul des constantes et exemple. — Supposons les hauteurs y exprimées en kilomètres, les pressions h en millimètres de mercure, les poids de litre z en grammes. La variation de pression pour une augmentation de hauteur dy sera

$$dh = -10^6 dy \cdot \frac{z}{13500};$$

donc, la constante représentée par C dans la formule (2) a pour valeur

$$C = \frac{10^4}{135};$$

on a ensuite

$$k = \frac{CD}{H} = \frac{10^4}{135} \cdot \frac{1,293}{760} = 0,12602 \quad (*).$$

Pour le calcul numérique, l'équation (7) peut s'écrire

$$q = \frac{1}{k} l \left(0,00014615 \frac{\sin u \cos \frac{u+\varphi}{2}}{\cos^2 u \sin \frac{u-\varphi}{2}} \right). \qquad (10)$$

(*) $\log \frac{1}{k} = 0,8995489$ et $\frac{1}{k} = 7,935.$

Exemple : $\varphi = 45°$. On obtient

$$u = 45°1'0'',3 \text{ (*)},$$
$$q = 0{,}00464 \text{ kilomètres},$$
$$c = 67{,}5603 \text{ kilomètres},$$

pour l'asymptote verticale,

$$x + c = 6{,}9945 \text{ kilomètres},$$

et, par conséquent, pour sa distance à y (fig. 1)

$$OA = 60{,}5658 \text{ kilomètres}.$$

Il est pour ainsi dire impossible de dessiner la partie montante de la trajectoire tellement sa convexité est légère; on peut s'en faire une idée en cherchant le point d'intersection de la tangente à l'origine avec la tangente à l'infini; on obtient pour les coordonnées de ce point

$$x = y = 7{,}94 \text{ kilomètres};$$

de sorte que si l'on s'imagine un carré de 8 mètres de côté, les deux tangentes s'obtiendront en joignant un sommet de ce carré au sommet diagonalement opposé et à un point situé sur un des côtés qui y aboutissent à environ 5 millimètres de distance de ce sommet.

DEUXIÈME CAS

$$a = N \sin \varphi = 1, \quad \varphi = 88° 36' 53'',4.$$

L'équation (3) devient

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(1 + be^{-ky})^2 - 1}};$$

(*) u représente l'angle que la tangente à l'infini fait avec la verticale.

l'intégration donne

$$x + c = \frac{1}{k}\sqrt{1 + \frac{2}{b}e^{ky}}, \qquad (11)$$

équation dans laquelle

$$c = \frac{1}{k}\sqrt{1 + \frac{2}{b}}.$$

On en tire

$$e^{ky} = \frac{b}{2}\left\{k^2(x + c)^2 - 1\right\}$$

$$y' = bk\frac{x + c}{e^{ky}} = 2k\frac{x + c}{k^2(x + c)^2 - 1}.$$

On voit que lorsque x augmente indéfiniment, y augmente aussi au delà de toute limite ; la dérivée, essentiellement positive et décroissante, devient nulle pour $x = \infty$, de sorte que la courbe présente constamment sa convexité vers le haut ; la branche montante n'a plus d'asymptote qui est remplacée par une droite parallèle à l'axe des x située à l'infini.

Pour x négatif, la courbe représente la trajectoire suivie par un rayon lumineux partant sous l'angle de 88°36′53″,4 vers les couches atmosphériques inférieures. L'équation (11) montre que lorsque y tend vers $-\infty$, x tend vers la valeur finie

$$x = -\frac{1}{k}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{b}} - 1\right) = -\frac{1}{k}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin 45^\circ \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

soit

$$x = 648{,}4798 \text{ kilomètres.}$$

A cette distance de l'axe y la branche descendante présente donc une asymptote verticale.

TROISIÈME CAS

$$a = N \sin \varphi > 1, \quad \varphi > 88^\circ\, 36'\, 53'',4.$$

Dans ce cas, la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{(1 + be^{-ky})^2 - a^2} \tag{3}$$

s'annule pour une valeur *réelle et positive* de y donnée par

$$e^{ky} = \frac{b}{a-1} = \frac{N-1}{N \sin \varphi - 1}. \tag{12}$$

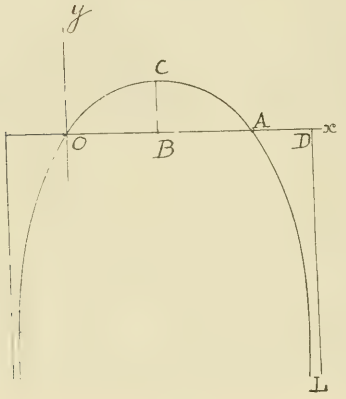


Fig. 2.

A cette hauteur maxima le rayon subit la réflexion totale; à partir de la valeur de x correspondant à ce maximum il faudra prendre le signe — dans le second membre de l'équation (3). Après intégration, il convient d'écrire

$$c + x = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sqrt{\frac{be^{-ky} + a + 1}{be^{-ky} - (a-1)}}\right) \tag{13}$$

jusqu'à $x = OB$ (fig. 2), et

$$c + X = \frac{\pi}{m} - \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sqrt{\frac{be^{-ky} + a + 1}{be^{-ky} - (a-1)}}\right) \tag{14}$$

au delà du maximum; dans ces équations

$$m = \frac{k\sqrt{a^2 - 1}}{a}$$

et

$$\text{tg} \cdot mc = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\sqrt{\frac{b+a+1}{b-a+1}}.$$

L'équation (14), pour $y = 0$, donne

$$X = \frac{\pi}{m} - 2c \qquad (15)$$

qui est la portée OA (fig. 2) de la trajectoire au-dessus de l'horizon. L'équation (14) pour $y = -\infty$ donne

$$X_1 = \frac{\pi}{m} - c - \frac{1}{m}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}},$$

qui indique une asymptote DL parallèle à l'axe des y. La courbe est d'ailleurs évidemment symétrique par rapport à la droite BC sur laquelle se trouve l'ordonnée maxima.

Exemples (*).

φ	y maximum.	Portée.	X_1
(**) 89° 1′13″,4	5,501	1458,105	2179,223
89°30′	1,108	519,856	1357,69
90°	0	0	1023,309

* * *

On peut à présent se faire une idée de l'ensemble des trajectoires décrites par les rayons lumineux issus du point O :

1° Tous les rayons compris dans le cône supérieur AOB

(*) Il convient pour le calcul numérique de poser $\frac{1}{N \sin \varphi} = \cos u$.

(**) Les distances inscrites dans ce tableau expriment des kilomètres. La première valeur de φ correspond à $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

(fig. 5) d'ouverture 177°15′46″,8 (*) marcheront vers le haut en décrivant des trajectoires telles que O1 ayant une tangente à l'infini inclinée sur la verticale.

2° Les rayons dirigés suivant les génératrices OA du cône AOB décriront une trajectoire telle que O2 n'ayant plus de tangente à l'infini et coupant l'horizon à une distance infinie.

3° Les rayons compris entre la surface conique AOB et

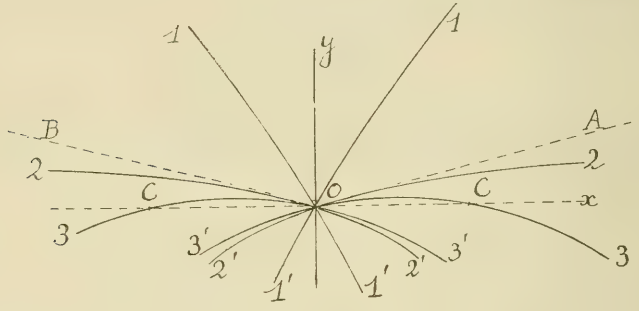


Fig. 3.

l'horizon (ouverture : 1°23′6″,6) subiront la réflexion totale et suivront une trajectoire telle que OC3 rencontrant l'horizon en un point C d'autant plus rapproché de l'origine que le rayon est plus rapproché de l'horizon, trajectoire possédant une asymptote verticale.

4° Enfin tous les rayons dirigés au départ sous l'horizon décrivent des trajectoires telles que O3′, O2′, O1′, prolongement de O3, O2, O1, trajectoires ayant toutes une asymptote verticale.

* * *

De ce qui précède, on déduit immédiatement la solution du problème inverse : *Un point lumineux se meut dans l'atmosphère en décrivant un cercle de très grand rayon autour d'un point* O

(*) Figure schématique dans laquelle l'angle AOB a été beaucoup agrandi.

où se trouve placé un observateur ; chercher à chaque instant le rayon qui vient aboutir en O *et l'angle qu'il y fait avec la verticale.* Cet angle est la distance zénithale observée, la vraie distance zénithale étant l'angle que fait la tangente à l'infini de la trajectoire lumineuse avec la verticale. Mais on va voir qu'il n'y a pas besoin de connaître la forme de la trajectoire lumineuse pour calculer la vraie distance zénithale dans une atmosphère formée de couches planes parallèles.

Distance zénithale dans une atmosphère formée de couches planes parallèles.

Quelle que soit la succession des états des couches d'air, si z et φ sont respectivement les angles qu'un rayon lumineux fait avec la verticale dans l'éther du vide d'indice 1 et dans le lieu d'observation où l'air a l'indice N, d'après les lois de la réfraction, on a

$$\sin z = N \sin \varphi. \qquad (1)$$

Il suffit donc pour avoir z, φ étant la distance zénithale observée, de calculer, à l'aide de la loi de Gladstone, l'indice de l'air du lieu d'observation, connaissant la température, la pression et l'état hygrométrique de ce lieu.

* * *

Si l'on ne tient pas compte de l'état hygrométrique et si D est le poids du litre d'air à la température t et à la pression H, D_0 et N_0 représentant le poids du litre et l'indice dans les conditions normales ($N_0 = 1{,}0002923$), on a

$$\frac{N - 1}{D} = \frac{N_0 - 1}{D_0},$$

et, comme

$$D = D_0 \cdot \frac{1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{H}{760},$$

il vient

$$N = 1 + \frac{H}{760} \cdot \frac{0{,}0002923}{1 + \alpha t},$$

et, en remplaçant dans (1),

$$\sin z = \sin \varphi \left(1 + \frac{H}{760} \cdot \frac{0{,}0002923}{1 + \alpha t}\right).$$

* * *

Pour tenir compte de l'état hygrométrique de l'air dans le calcul de N, on se basera sur la loi de Landolt, qui dit que « *l'énergie réfractive d'un mélange* de plusieurs corps *multipliée par le poids de ce mélange égale la somme des produits obtenus en multiplant le poids de chaque corps par son énergie réfractive.* » Considérons un litre d'air humide à la pression H et à la température t, f étant la tension de la vapeur qu'il contient. Soit N l'indice, D le poids du litre du mélange, *dans ces conditions.* Désignons par $N_{a,H,t}$ et $N_{v,H,t}$ respectivement les indices de l'air et de la vapeur à la pression H et à la température t, les poids de litre étant représentés d'une manière analogue, et par N_a, N_v les indices des mêmes corps dans les conditions normales. Les lois de Dalton et de Landolt donnent

$$D = D_{a,H-f,t} + D_{v,f,t}$$

$$N - 1 = D_{a,H-f,t} \cdot \frac{N_a - 1}{D_a} + D_{v,f,t} \cdot \frac{N_v - 1}{D_v}.$$

En observant que

$$D_{a,H-f,t} = D_a \cdot \frac{H - f}{760(1 + \alpha t)}$$

$$D_{v,f,t} = D_v \cdot \frac{f}{760(1 + \alpha t)},$$

il vient

$$N - 1 = \frac{(H - f)(N_a - 1) + f(N_v - 1)}{760(1 + \alpha t)},$$

et, en remplaçant dans (1),

$$\sin z = \sin \varphi \left\{ 1 + \frac{H(N_a - 1) + f(N_v - N_a)}{760(1 + \alpha t)} \right\}.$$

L'indice de la vapeur peut se calculer en partant de son énergie réfractive et du poids de son litre qui sont respectivement :

$$\frac{N_v - 1}{D_v} = 0{,}000324$$

$$D_v = \frac{5}{8} \cdot 1{,}293.$$

On obtient

$$N_v = 1{,}0002618$$

et

$$\sin z = \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{760(1 + \alpha t)} \cdot \frac{2923\,H - 305 f}{10^7} \right).$$

LA MATIÈRE

SA NAISSANCE, SA VIE, SA FIN

PAR

P. DE HEEN

PROFESSEUR DE PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Devise : Il ne peut y avoir pour le physicien ni phlogistique, ni corpuscules, ni lumière, ni magnétisme, ni électricité. Il n'y a que gyrostats et tourbillons vibrants.
P. De Heen.

AVANT-PROPOS

RÉFLEXIONS PRÉLIMINAIRES

Une chose des plus rebutantes pour beaucoup d'esprits se trouve dans la notion de l'*éther*. On peut en parler quelque peu de temps à autre, plus ou moins à couvert, mais il y a certainement l'indice d'une faiblesse d'esprit si l'on en parle trop et surtout si l'on paraît y croire. C'est là une chimère inventée pour les besoins de la cause ; aussi l'*horreur de l'éther* a-t-elle incité des physiciens éminents à substituer à l'appellation « oscillation de l'éther », l'appellation « oscillation électro-magnétique ». En esprit fort, on se retire ainsi d'un monde que de parti pris on ne veut pas examiner.

Si, en réalité, pareille désespérance était justifiée, on serait tenté d'y compatir. Mais ce qu'il y a de piquant, c'est que ceux qui manifestent cette horreur de l'*éther* admettent sans hésitation aucune la *matière*, alors que les raisons qu'il y aurait pour douter de celle-ci sont exactement les mêmes.

Concevons un homme aveugle depuis sa naissance ; supposons ensuite que nous venions à rouer cet homme de coups à l'aide d'un bâton. Puis, lorsque cette opération sera terminée, demandez-lui comment il interprète cette manifestation. A moins d'être

doué d'un scepticisme remarquable, il dira qu'il a reçu des *coups de bâton* et il en induira que le *bâton* existe.

Considérons maintenant un sujet possédant le sens de la vue et forçons-le à regarder le soleil. Après un instant, il ressentira une douleur aussi vive que celle du sujet précédent, et il pourra dire : « J'ai reçu *un coup d'éther* (peu importe le mot du reste), et il en induira, comme le précédent, que ce « quelque chose » existe. Seulement on désigne le *coup d'éther* sous le nom de *lumière.*

En résumé, *nous ne pouvons nous rendre compte de l'existence de la matière ou, plus généralement, d'une substance quelconque, que par un état de mouvement* soit de l'objet, soit de l'observateur, comme le faisait remarquer Ostwalt dans un de ses discours. Et il existe exactement les mêmes raisons pour l'homme roué de coups de nier l'existence du bâton que pour le physicien de nier l'éther. On peut donc en parler sans craindre de passer pour faible d'esprit. L'inverse paraîtra peut-être vrai pour celui qui médite ces lignes.

Ceci étant admis, nous avons la conviction profonde qu'il est possible de tirer les sciences physiques de l'incohérence que l'on rencontre à chaque pas. Un des exemples les plus curieux est celui-ci : les physiciens modernes admettent que l'oscillation lumineuse et calorifique correspond à l'oscillation électro-magnétique, mais qu'il n'en est nullement ainsi de la cause qui détermine l'oscillation, c'est-à-dire du calorique.

Mais supposons pour un instant qu'ils veuillent bien abandonner ce curieux paradoxe et admettre que le calorique et l'électricité sont en réalité une seule et même chose.

La conséquence de ce premier pas ne sera pas moins curieuse; pour eux, l'électricité n'est pas un effet, c'est une cause, une substance mystérieuse irréductible. Si donc ils finissent par admettre notre premier raisonnement, cette substance sera à la

fois l'origine de l'électricité et de la chaleur, *et voilà restaurée la théorie du phlogistique.*

La mécanique de l'éther doit être capable de reproduire l'image de la nature dans son aspect physique au même titre que la plaque photographique reproduit l'*image* d'un être vivant. Mais si l'on réalise cette chose admirable, il sera tout aussi absurde de croire que l'on aura dévoilé la nature profonde des choses que si le photographe prétendait connaître la nature intime de la vie par cela qu'il a photographié un être vivant.

Nous n'aurons alors atteint que la première surface des choses. L'élément matériel renferme des profondeurs insondables. Mais nous avons l'illusion de la simplicité lorsque l'interprétation d'un ordre de phénomènes nous apparaît.

Un raisonnement tout aussi simpliste que celui qui sert à démontrer la réalité de l'éther permet de montrer l'existence de l'élément matériel, présentant une forme spéciale ou animé de certains mouvements, mais dont la petitesse est telle qu'il échappe au sens visuel.

Imaginons un cylindre vertical en toile, par exemple, ouvert à sa partie inférieure et à sa partie supérieure, que nous maintiendrons à une certaine hauteur. Plaçons en dessous de ce cylindre, sur une table, une poudre fine et légère. Cela étant, supposons que cette poudre se mette à tournoyer en fournissant l'image d'un tourbillon.

Que conclura l'observateur? Il conclura d'abord à l'existence d'un *fluide* interposé entre le cylindre et la poudre, lequel fluide détermine l'entraînement, et il conclura encore que si ce fluide pénètre, par exemple, par la partie supérieure du cylindre, il doit exister à l'intérieur de celui-ci *un objet, caché* par la toile, animé d'un mouvement gyratoire ou tout au moins présentant une forme spéciale.

De même, si l'on remplace le cylindre en toile par un aimant et la poudre fine par un rayon cathodique, il faudra conclure à l'existence du *fluide* que l'on appelle *éther* et à l'existence de l'*objet caché*, trop petit pour être aperçu, que l'on appelle *molécule* (expérience de Broca).

Il existe des pays où il est d'usage de déformer des parties du corps dès l'enfance; indépendamment de ces déformations, ces êtres peuvent devenir très beaux.

Des usages semblables existent lorsqu'il s'agit de développer l'intellectualité de la jeunesse, et c'est alors surtout à ce que l'on pourrait appeler la *vision intellectuelle,* que l'on s'attaque. Il en résulte que des choses dont l'évidence peut paraître enfantine pour un sujet sur lequel on n'a pas pratiqué l'atrophie visuelle, échappent complètement à un sujet dont l'intellectualité est arrivé au degré le plus élevé.

Un autre exemple non moins singulier se trouve dans l'idée que les physiciens se font encore du calorique. Si vous interrogez la thermodynamique, elle vous dira que la chaleur d'un gaz est le résultat du mouvement d'agitation des éléments. Donc *la cause de la sensation de chaleur se trouve dans le mouvement d'agitation.* D'autre part, on nous enseigne, dans la théorie des radiations, que la chaleur est due à une *vibration.* Les choses se passent donc comme suit : Dans un espace limite des diapasons sont projetés dans tous les sens; l'observateur perçoit des chocs et un son, et, en suivant les errements du physicien qui étudie la chaleur, il en conclut que *ces chocs représentent l'essence même du son* et que le *coup de diapason* représente l'impression du son.

Nous savons que le son est dû aux *vibrations* des diapasons et non au *choc* que percevrait quelqu'un sur lequel on projetterait un diapason. Ces vibrations peuvent être la *conséquence* de

ces mouvements en tous sens ou, réciproquement, ces mouvements en tous sens peuvent être la *conséquence* des vibrations, et telle est sans doute la réalité lorsqu'il s'agit du mouvement calorifique.

Ajoutons une dernière réflexion. Lorsqu'il s'est agi de faire la théorie des phénomènes magnétiques, les *abstracteurs* ont cru pouvoir considérer des pôles magnétiques isolés. Rien, du reste *a priori*, de contraire au raisonnement que de considérer un magnétisme nord et un magnétisme sud et des particules portant *un* de ces magnétismes, ainsi que cela se passerait pour un fluide quelconque.

Ce fut un physicien belge, P. Geüns, de Maeseyck, qui démontra le premier, dans un livre publié en 1768 (1), que la *molécule-aimant est bipôle*, que les pôles magnétiques ne sont pas indépendants, ne peuvent pas être isolés.

Nous sommes actuellement en 1905, et il est curieux de voir les physiciens persister à croire qu'il en est autrement pour l'électricité; on envisage sans sourciller des corpuscules positifs ou négatifs qui se meuvent avec la plus parfaite indépendance, et cela alors que des phénomènes se montrent d'une manière analogue pour le magnétisme et pour l'électricité. Il est du reste d'usage, quand on ne conçoit pas une chose, d'imaginer un fluide; aussi j'exprime pour l'avenir ce souhait, que lorsque les physiciens se trouveront en mesure d'étudier le phénomène de la vie, ils ne recommencent pas à inventer des fluides et des corpuscules vitaux. Il suffit de jeter un coup d'œil sur l'ensemble des recherches entreprises à l'aide de l'hypothèse corpusculaire pour se rendre compte des difficultés et des complications inextricables auxquelles elle conduit, bien que je me hâte de

(1) Publié chez Henri Korsten, imprimeur à Venlo, 1768.

reconnaître que dans certains cas particuliers elle puisse être considérée comme équivalente à la vérité, ainsi que le montrent les admirables résultats obtenus en particulier par Lorentz.

Mais il est curieux de voir que ceux qui s'effraient de voir s'introduire dans la science une représentation mécanique des phénomènes électriques et magnétiques, n'hésitent pas, pour rendre compte des faits, d'introduire des conceptions mécaniques d'atomes de la plus haute fantaisie; au sein de ceux-ci nagent des corpuscules petits et gros; ils ont des propriétés qui varient suivant les besoins de la cause, le plus drôle étant sans doute le plus gros, qui paraît être positif et à peu près un atome. Cependant, il y a encore, à côté de cela, de la matière et, fort heureusement, des éléments bipôles, *dont un seul pôle positif sera sans doute à peu près aussi gros que le tout.* Et ce bel édifice constitue un objet d'admiration pour ceux qui possèdent au plus haut degré l'esprit rigoureux!

Pour interpréter les phénomènes physiques, on a inventé des fluides, des corpuscules, de l'électricité, qui n'existent pas plus que le calorique et le phlogistique, mais l'état énergétique de la *substance* qui constitue la matière détermine toutes ces apparences que les physiciens prennent encore pour des réalités. Et il est étrange de les voir préférer ces fantômes de leur imagination à une interprétation cinétique simple d'une substance unique, bien qu'ils aient admis, par suite d'une étrange contradiction de l'esprit humain, une théorie du mouvement de ces choses chimériques.

Mais ce qu'il y a de plus singulier, c'est qu'après avoir inventé cette énorme quantité de choses, ils ont acquis l'illusion de s'être maintenu, autant qu'on peut le faire, en dehors de toute hypothèse, et de n'avoir réalisé que la traduction fidèle du fait observé.

Il nous semble qu'il est temps de combattre de semblables idées et d'admettre également dans la théorie des phénomènes électriques que le dernier élément est bipôle, que ces pôles ne peuvent pas être isolés.

Supposons maintenant que nous devenions le physicien sceptique se refusant à admettre n'importe quel raisonnement, n'admettant que les faits reliés par des équations qui renferment des coefficients qui échappent à toute compréhension. Peu importe, les faits sont reliés d'une manière quelconque, comme le seraient une série de points observés unis par une courbe. Il devient possible de *classer* ces faits observés, d'intrapôler ou d'extrapôler, et, par conséquent, chose plus précieuse encore, il devient possible de prévoir des faits nouveaux que l'observation confirmera.

Classer et *prévoir*, telles doivent être les qualités d'une théorie physique, *expliquer* ne vient qu'en seconde ligne; je dirai même qu'il est oiseux de le faire si les deux premières conditions ne sont pas satisfaites.

Mais ce serait certainement un abus de reprocher à une théorie d'expliquer si elle réalise en même temps les deux premières qualités maîtresses.

En un mot, nous disons que la théorie que nous proposons nous a permis de *classer* et nous a permis de *prévoir* des faits.

Cela suffit; que l'on croie ou que l'on ne croie pas à la réalité de notre interprétation, peu importe, cette théorie est physiquement utile.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

L'ion peut être défini d'une manière plus générale que nous ne l'avons fait. Nous avons dit que le mécanisme du phénomène électrique devait correspondre : 1° à la notion d'orientation; 2° à la notion de pression et de dépression de l'éther; 3° qu'il doit tenir compte du caractère tourbillonnaire.

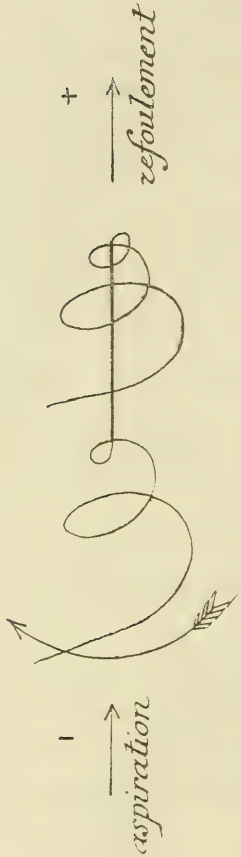


Fig. 1.

Nous pourrons donc dire, abstraction faite de toute hypothèse sur la nature intime de l'ion, qu'il représente *un système gyrostatique aspirant et foulant* agissant sur le fluide éther.

Cependant, pour rendre l'exposé plus clair, nous imaginerons un système remplissant ces conditions, ce qui ne veut nullement dire qu'il serait impossible d'en imaginer un autre remplissant les mêmes fonctions. Nous devons prévenir aussi l'erreur de plusieurs de nos lecteurs qui ont pensé que notre théorie reposait sur les détails de la forme que nous attribuons à l'ion.

La plus simple manière de le concevoir consiste à lui attribuer la forme d'un fil élastique contourné en hélice; cette hélice étant animée d'un mouvement gyratoire autour de son axe, de manière à déterminer l'aspiration et le refoulement, l'aspiration ou la dépression correspondant à la polarité négative; la pression ou le refoulement correspondant à la polarité positive (fig. 1).

Actions d'influence. — Considérons une hélice *h* (fig. 2) animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe *ab* et plongée dans un fluide, le sens du mouvement de rotation étant celui indiqué par la flèche. La composante *f* aura pour résultat de communiquer à l'hélice une forme d'autant plus allongée que la vitesse de rotation est elle-même plus grande. Remarquons encore que si nous considérons l'enveloppe conique de cette hélice, il *tendra* à se produire une aspiration par la base et un refoulement vers le sommet.

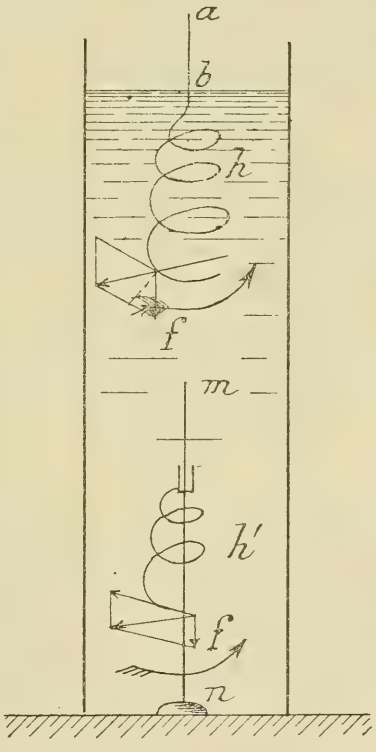


Fig. 2.

Considérons maintenant une deuxième hélice *h'* pouvant tourner autour de l'axe *mn* et se déplacer longitudinalement suivant cet axe. Le mouvement de rotation de *h* ne tardera pas à se communiquer à *h'*, laquelle subira dès lors la même déformation, et comme les mouvements gyratoires s'exécutent dans le même sens, il y aura attraction, ainsi que le montrent les expériences de M. Weyher.

Remarquons encore ce point essentiel, que le mouvement du fluide, dirigé de bas en haut dans la région axiale, sera à chaque instant compensé par le déplacement de la même masse, se mouvant de haut en bas dans la région périphérique.

Tel serait le mécanisme qui correspond au phénomène électrostatique de l'*influence*. *Il est caractérisé par l'absence de déplacement relatif de la masse fluide, prise dans son ensemble, par rapport aux éléments gyrostatiques*. La même masse fluide joue indéfiniment le même rôle.

On voit que si l'on considère sur une surface une série de gyrostats droits et gauches, tous les gyrostats de même sens de rotation se raccordent entre eux par l'intermédiaire de l'éther.

Il y a lieu de remarquer ici que tout ion qui possède un sens de rotation tel que cette rotation ait pour effet de communiquer à l'électron la forme plane, ne peut intervenir dans la constitution de la matière. Étant rigoureusement neutre, il ne pourrait déterminer aucune affinité. Si donc ces ions existent, ce qui paraît vraisemblable, ils sont destinés à flotter sans cohésion dans les espaces célestes. Nous les désignerons sous le nom d'ions V.

Considérons maintenant deux gyrostats *a*, *b* (fig. 3) orientés négativement, placés l'un en face de l'autre.

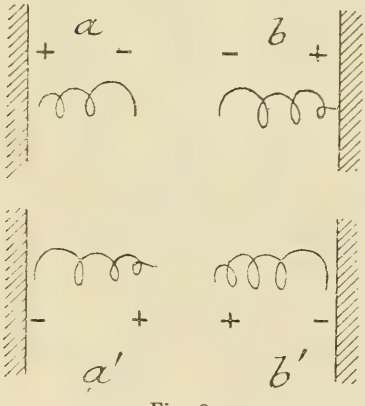


Fig. 3.

Les deux seules combinaisons possibles sont réalisées : 1° par deux gyrostats dont le pas est de même sens tournant en sens contraires ; 2° par deux gyrostats dont les pas sont de sens inverses tournant dans le même sens. Toute autre combinaison déterminerait l'introduction des ions V.

Dans aucun des deux cas que nous venons de considérer, les tourbillons engendrés ne peuvent se raccorder, et par conséquent se repoussent.

Le même raisonnement est évidemment applicable aux électrons a', b', orientés positivement.

Donc, les électricités de noms contraires se repoussent.

Induction électrostatique. — Si, au lieu de considérer le fluide éthéré ou liquide dans l'impossibilité de s'écouler, ainsi que nous l'avons admis dans le phénomène électrostatique, nous lui attribuons, au contraire, cette faculté, les effets obtenus seront différents.

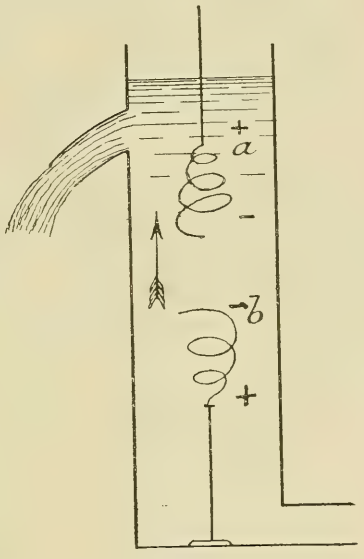


Fig. 4.

Considérons, en effet, l'ion *a* (fig. 4) animé du mouvement gyratoire qui correspond à sa polarisation, c'est-à-dire à son allongement; il se produira toujours dans ces conditions un appel du fluide dans le sens indiqué par la flèche. Le pôle négatif correspond à une aspiration, d'où il résulte que l'action de ce courant tendra à orienter l'ion *b* en sens contraire, et dès lors l'orientation négative engendrera l'orientation négative, à l'opposé de ce qui se passe dans le phénomène de l'influence.

Le même phénomène se produira évidemment si, au lieu de considérer la polarité négative, on considère la polarité positive, ainsi que la figure l'indique (fig. 5).

Si les ions sont disposés sur une surface, nous observons le phénomène de l'*influence*. Si, au contraire, l'ion se déplace dans l'espace éthéré ainsi que cela se passe, par exemple, dans

l'aigrette et dans les substances iodynamiques en général, le double mouvement de rotation et de translation déterminera le courant d'éther, c'est-à-dire l'*induction électrostatique* dont nous avons montré l'existence par l'expérience et qui préside au courant (1).

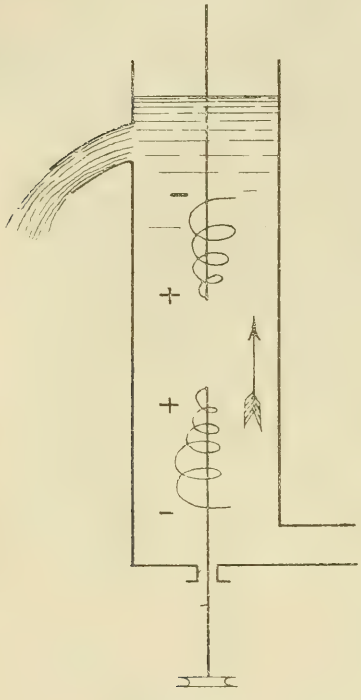


Fig. 5.

On voit que par suite de cette gyration, l'*action* qui tend à déplacer le fluide dans une direction déterminée est accompagnée d'une *réaction* qui tend à déplacer l'ion en sens contraire. Nous avons vérifié cette conséquence par l'expérience (2).

Pour plus de simplicité, nous ferons usage du signe représentatif de l'ion (fig. 6), lequel est doué des propriétés suivantes, résultant de ce que nous venons de dire :

1° Si la tension électrique s'accroît, l'angle α diminue, la vitesse de gyration et de propulsion s'accentue;

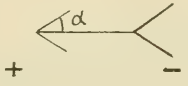


Fig. 6.

2° Si deux ions sont placés sur une même direction et à l'état

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité,* p. 18.

(2) Voir p. 43.

de repos relatif par rapport à l'*ensemble* de la masse fluide éther, le mouvement gyratoire se transmet de l'un à l'autre, d'où déformation et orientation des éléments (fig. 7). La force d'orientation correspondait au phénomène de l'*influence*, en

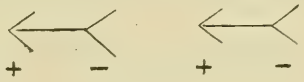


Fig. 7.

impliquant l'action attractive des pôles de noms contraires, et l'action répulsive des pôles de même nom ;

3° Si un ion est à l'état de mouvement relatif par rapport à l'éther ambiant, de même que dans l'expérience (fig. 4 et 5), le phénomène inverse se manifeste ; en s'approchant d'un autre ion, il déterminera une polarité de même nom. C'est le phénomène de l'*induction électrostatique*.

LA MATIÈRE

SA NAISSANCE, SA VIE, SA FIN

CHAPITRE PREMIER

États chaotique et supramatériel.

Instabilité de la matière. — L'état chaotique ou nébulaire. — Formation de l'ion. — Formation de la chaîne ionique et du courant électrique. — Phosphorescence. — État supragazeux. — Formation de la nébuleuse spirale et les causes de sa rotation. — Démonstrations expérimentales de ces actions mécaniques. — Cause probable de l'odeur. — Corollaire. — Décharge électrique de surfaces par le mouvement ionique.

A première vue, tout paraît stable dans la nature; l'enfant auquel on montrerait pour la première fois un arbre chargé de feuilles et de fruits croirait aisément qu'il se trouve en face d'un objet doué de grande stabilité; l'homme qui observe les espèces animales à la surface de notre globe pense également que ces choses ne changeront jamais, à moins que le géologue ne lui ait appris qu'elles passent comme les feuilles et comme les fruits de l'arbre.

Le savant, de même que l'enfant, a cru à la stabilité d'*une chose*, il l'a déclarée immuable, non sans un certain sentiment d'orgueil; cette chose qui aurait existé depuis toujours et ne devant jamais cesser d'être, est ce qu'on appelle *matière*.

Les faits les plus récents montrent que les espèces chimiques passent. De même que les espèces animales, elles naissent, vivent et meurent. Certaines conditions de température et de *pression*

sont indispensables au maintien de leur existence; c'est ainsi que, par exemple, le radium, né vraisemblablement sous les pressions formidables qui règnent au sein de notre globe, meurt lentement lorsqu'il est amené à la surface (1), ainsi que le ferait l'animal tiré des grandes profondeurs de la mer. Un très grand nombre de substances manifestent du reste des tendances analogues, mais à un degré plus faible, ainsi que l'a montré pour la première fois le Dr Gustave le Bon.

L'état chaotique ou nébulaire. — Déjà à l'époque où nous faisions nos études universitaires, l'examen des spectres fournis par les nébuleuses nous avait suggéré cette pensée, que ces objets célestes ne montrent pas seulement des mondes à l'état de formation, formation qui serait le résultat de l'agglomération d'atomes, tels qu'ils sont conçus par les chimistes, mais que ces objets nous montrent également la *genèse de ces atomes eux-mêmes.*

La raison qui nous portait à admettre cette manière de voir se trouve dans cette circonstance, que si les nébuleuses étaient formées par les atomes de la chimie, nous devrions y trouver les raies extrêmement nombreuses qui y correspondent, alors que ces raies sont peu nombreuses et ne coïncident qu'avec les raies d'un petit nombre de corps, souvent même imparfaitement. Si donc les autres substances ne se rencontrent pas dans ces objets, actuellement, et si par la suite ils doivent s'y rencontrer, du moins en certaine proportion, ainsi que les étoiles formées le montrent, nous pouvons conclure que nous assistons à la genèse des espèces chimiques.

Une deuxième pensée nous semble depuis longtemps non moins évidente. Si un seul atome, l'atome de fer par exemple, est capable de fournir un nombre considérable de raies brillantes, on doit en conclure que cet atome est bien loin d'être simple, mais qu'il est constitué lui-même par un grand nombre de

(1) Il est vraisemblable que par suite de son poids atomique considérable, ce corps occupe normalement les régions profondes de notre globe, mais qu'une petite partie a été amenée à la surface, par suite des remous de la masse, à l'époque où la terre était encore à l'état liquide.

particules que nous désignons sous le nom d'*ions*, chaque ion déterminant en vibrant sa note lumineuse.

Nous voyons ainsi reculée la limite de division *naturelle* de la matière. Elle correspondait primitivement à l'*atome chimique*, elle correspond maintenant à l'*ion*.

Et cette limite est-elle la dernière? Évidemment non; car alors même que l'atome chimique ne serait pas formé et si les ions constitutifs étaient présents dans la nébuleuse que nous venons de considérer, ils pourraient fournir la raie brillante qui leur correspond. Nous verrons, du reste, plus loin que c'est seulement lorsque ces ions sont dans cet état de liberté qu'ils fournissent les raies que nous connaissons.

Nous conclurons donc que la nébuleuse représente, non seulement un milieu dans lequel les espèces chimiques sont en voie de formation, mais dans lequel les éléments qui constituent ces atomes (les ions) se forment eux-mêmes.

Nous pouvons donc répéter ici cette pensée que nous avons formulée il y a quelques années, qu'il semble que, par degrés successifs, il est possible de passer des substances les plus transcendantes à celle que nous appelons matière.

L'ion, qui représente un stade de l'évolution de la *substance* déjà voisin de l'état qui correspond à la *matière*, serait le résultat de l'accumulation d'une certaine quantité d'énergie de gyration dans une substance appartenant à un *stade substantiel* immédiatement supérieur à l'ion, et déjà constitué par des fibres gyrostatiques. Les choses se passent comme si cette énergie de gyration correspondait à un enroulement de ces fibres, lequel communique à l'élément *ion* les propriétés de l'hélice, et en particulier celle de déterminer l'aspiration et le refoulement du milieu dans lequel plonge ce gyrostat. Ce système, doué d'une parfaite élasticité, sera susceptible de vibrer, comme le ferait un fil d'acier contourné en hélice. Il pourra même se faire, si l'oscillation atteint une certaine amplitude, que le sens de l'enroulement de l'hélice soit renversé, de telle manière que l'extrémité de l'élément qui correspondait à une aspiration (polarité négative) corresponde au refoulement (polarité positive), et réciproquement.

Que se passera-t-il maintenant dans un milieu où l'énergie s'est accumulée sous cette forme? Les expériences faites à l'aide de substances matérielles démontrent que ces éléments ions, animés de mouvements gyratoires rapides dans le fluide dont ils sont issus, tendent à s'orienter et à s'attirer les uns les autres, de manière à constituer des chaînes ou une fibre dans laquelle les parties aspirantes correspondent aux parties foulantes.

Dans le signe (fig. 8), l'extrémité *a* correspond à l'aspiration,

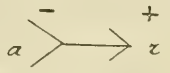


Fig. 8.

le côté *r* au refoulement. La chaîne dont nous venons de parler sera donc représentée par la figure 9; son axe sera parcouru par

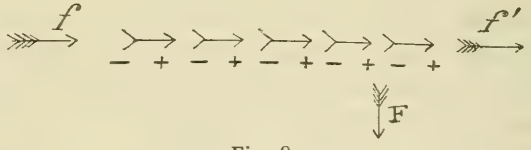


Fig. 9.

un courant gyrostatique du fluide ambiant, que nous désignerons sous le nom d'*éther*, et allant de *f* vers *f'*. *Ce courant est le courant électrique.*

Remarquons maintenant que lorsque deux ions doués de cette parfaite élasticité viennent à se rencontrer pour constituer la chaîne dont nous venons de parler, ils éprouvent des vibrations extrêmement rapides, lesquelles se transmettent dans l'éther ambiant suivant la direction de la flèche F et *se traduisent par le phénomène de la phosphorescence* de la matière en formation.

Au moment de la formation de la chaîne, une nouvelle quantité d'énergie est emmagasinée par suite de l'attraction et du rapprochement des pôles de noms contraires, avec accroissement d'énergie de gyration; en même temps se produit une très faible dissipation d'énergie sous forme de vibrations lumineuses. Ces

vibrations synchrones empêchent les ions d'entrer en contact, ainsi que le démontrent les expériences de Bjerckness, qui établissent qu'il y a dans ce cas répulsion réciproque des éléments agissants. Ces vibrations, qui correspondent à une perte d'énergie infinitésimale, ne peuvent, du reste, être rendues sensibles que grâce aux ions libres qui les reçoivent et qui se trouvent dans la substance fluorescente de notre rétine.

Nous démontrerons du reste plus loin par l'expérience, que chaque fois qu'il y a phosphorescence, il y a *matérialisation* des ions libres, production de chaînes ioniques, avec absorption d'énergie, avec refroidissement. Au contraire, chaque fois qu'il y a *dématérialisation* ou mise en liberté d'ions, il y a dégagement de chaleur, dégagement de l'énergie qui s'est accumulée dans la matière.

L'expérience montre, en effet, que toute manifestation ou accroissement d'énergie gyrostatique se traduit par une *condensation*, due à l'action de la force centripète, c'est-à-dire à une absorption de l'énergie ambiante, alors que le dégagement d'énergie ou de chaleur correspond à la diminution de l'énergie gyrostatique, avec accroissement de volume, diminution de la force centripète.

Supposons maintenant que les deux extrémités de la chaîne ionique que nous venons de définir viennent à se raccorder. Nous réaliserons ainsi l'état de la matière que nous désignerons sous le nom d'état *supragazeux*.

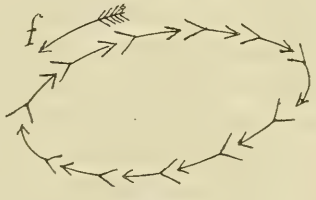


Fig. 9bis.

Tel est le premier noyau de condensation d'une *nébuleuse spirale* en formation. De plus, chaque ion se comportant comme une pompe centrifuge aspirante et foulante, la réaction produite par le fluide éthéré déterminera la rotation en sens inverse de la direction du courant axial d'éther, suivant la direction de la flèche *f* (fig. 9bis). Par suite de la rotation, la chaîne tendra à devenir circulaire.

Nous avons vérifié par l'expérience cette conséquence de notre

théorie. Un conducteur parcouru par un courant est mécaniquement comparable à une pompe aspirante et foulante ; lorsqu'il est mobile, il se déplace en sens inverse du sens du courant (1).

Il est, du reste, évident que si le tourbillon éthéré émis par l'aimant ou par un courant circulaire, enroule les rayons cathodiques (expérience de Broca) dans un sens déterminé, la réaction développée tendra constamment à déterminer la rotation de l'aimant ou du circuit en sens contraire.

Cette constatation faite, revenons à notre nébuleuse et remarquons que si une deuxième condensation analogue se forme, elle tendra à se disposer parallèlement à la première, ainsi que cela se passe pour deux circuits circulaires parcourus par des courants. Et il en sera finalement ainsi de la nébuleuse tout entière, laquelle, prise dans son ensemble, peut se comparer à un immense réseau de courants concentriques et parallèles présentant la forme lenticulaire et animé d'un mouvement de rotation d'ensemble dans un sens unique.

Dans la partie centrale, les frottements pourront retarder la vitesse de la gyration, de manière à produire la torsion qui donne à la nébuleuse la forme spirale.

Notre globe a conservé la trace de ce *courant originel* qui a présidé à l'établissement de son mouvement de rotation, *courant dont le sens nominal est dirigé en sens inverse de cette rotation et qui détermine les phénomènes magnétiques.* Remarquons, du reste, que ce courant doit tendre actuellement encore à accroître le mouvement diurne, mais très faiblement, eu égard à la grande condensation de la masse. De plus, le soleil et toutes les planètes sont parcourus par des courants de même sens.

Lorsque, par suite des causes dont nous nous sommes occupé précédemment, le soleil est le siège de perturbations violentes, le *courant originel* subit des variations qui se traduisent par la production de courants induits à la surface de notre globe et des autres planètes. Ces courants induits anormaux déterminent des

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité,* p. 43.

perturbations magnétiques et des aurores polaires particulièrement intenses.

Nous pouvons encore compléter la genèse des corps célestes par les considérations suivantes. Concevons nos chaines supragazeuses (fig. 10) dans un espace du ciel qui, grâce à ses propriétés énergétiques, a engendré un nombre d'ions relativement grand. Ces ions, attirés par le noyau supragazeux M, s'orienteront en affectant la forme de fibres F, lesquelles, sous l'action du mouvement gyratoire, ne tarderont pas à prendre la forme spirale.

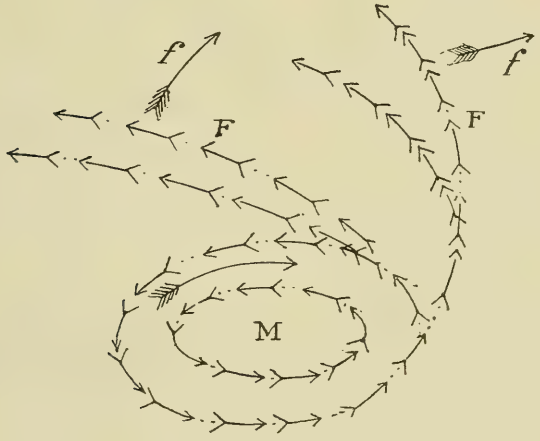


Fig. 10.

Or, ces spirales jouent véritablement le rôle de tentacules nutritives, ce sont réellement les racines de la nébuleuse. La comparaison est d'autant plus intéressante que, ainsi que nous le verrons plus loin, l'assimilation des racines des végétaux est le résultat ou la conséquence du même mouvement ionique.

Remarquons maintenant que chacune des fibres F est parcourue par un courant dont l'image parfaite est celle du rayon cathodique, la cathode étant représentée par l'espace riche en ions, lesquels s'orientent initialement sous l'action du mouvement gyratoire du noyau M.

Nous pouvons nous demander si ces courants spiraloïdaux

tendent à se déplacer dans le sens du mouvement de rotation de la nébuleuse.

Supposons qu'un fluide parcoure un tube dans le sens de la flèche φ (fig. 11). Une molécule *m* parcourant la courbe spirale tendra à s'échapper par la tangente *t*. Et représentons par F la force centrifuge normale à la courbe en ce point. Cette force F pourra se décomposer en deux autres, l'une, *f'*, suivant la direction qui unit le point *m* au centre de rotation *c*, et l'autre, *f*,

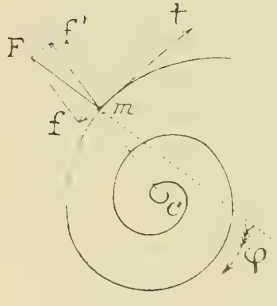


Fig. 11.

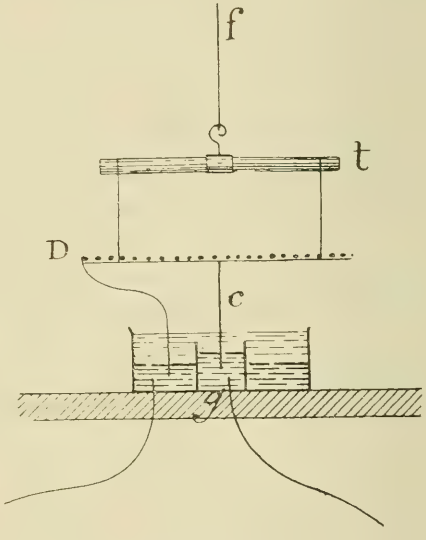


Fig. 12.

normale à cette direction et qui aura pour résultat de tendre à déterminer la rotation du système supposé rigide en sens inverse du sens de l'enroulement de la spirale.

Si nous supposons que le fluide se déplace en sens inverse de la flèche φ, le résultat sera exactement le même.

Nous pouvons donc dire que *le sens de la rotation du système autour du centre* c *sera indépendant du sens du déplacement du fluide, et qu'il s'exécutera en sens inverse du sens de l'enroulement de la spirale.*

Afin de réaliser l'expérience à l'aide du courant, nous nous sommes servi d'un fil de cuivre isolé ayant 50 mètres de longueur et 1 millimètre de diamètre. Ce fil, enroulé en forme de spirale, représentait un disque D (fig. 12) de 34 centimètres de diamètre, lequel, étant fixé sur une toile métallique, présentait une rigidité suffisante. L'extrémité du fil conducteur central *c* plongeait dans un godet *g* renfermant du mercure et auquel aboutissait l'un des pôles; le deuxième bout du fil plongeait dans le mercure de la cuvette annulaire auquel aboutissait le deuxième pôle. Enfin tout le système était suspendu à l'aide de fils de soie et par l'intermédiaire d'une traverse *t* à un fil de soie *f*.

Cela étant, le fil *f* est tordu de manière à communiquer au système mobile un mouvement de rotation dans le sens de l'enroulement conducteur. Au moment où l'on introduit le courant dans le circuit, on remarque d'abord l'arrêt du mouvement de rotation, puis un mouvement de rotation s'exécutant en sens inverse du sens de l'enroulement, et cela quel que soit le sens du courant.

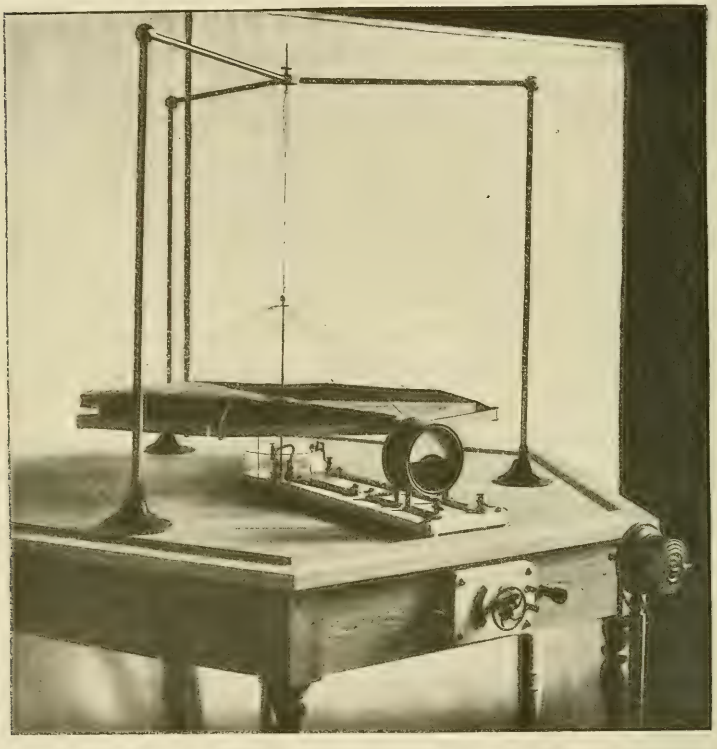
Cette expérience s'exécute avec une grande sûreté et comme telle constitue une belle expérience de cours, mais elle nécessite un courant de très grande intensité (15 ampères environ).

Nous avons reproduit l'expérience à l'aide d'un appareil de grande dimension nécessitant un courant de 40 ampères, dont nous reproduisons la photographie à la page 26.

Il importe, dans cette expérience, de faire en sorte que les conducteurs ne plongent qu'à une faible profondeur dans le bain de mercure, afin d'éviter tout frottement. Lors de la mise en marche et afin de vaincre l'inertie, il est parfois nécessaire d'interrompre et de rétablir deux ou trois fois le courant. On voit alors l'appareil se mettre lentement en marche et le mouvement s'accélérer à mesure que le courant agit pendant un temps plus long.

Remarquons que les spirales de la nébuleuse sont parcourues par des courants d'éther allant de l'intérieur vers l'extérieur, lesquels détermineront une action identique à celle d'un courant liquide parcourant un tube contourné en spirale.

En résumé, l'*état chaotique* serait représenté par l'existence, dans un milieu, d'ions indépendants (fig. 8), et l'état *supragazeux* par le premier terme de condensation (fig. 10). Ces deux états coexistent vraisemblablement dans presque tous les cas; ils manifestent, par suite de leur instabilité, les vibrations



ioniques luminescentes. Nous les rencontrons dans les nébuleuses et les comètes; ils constituent également, d'une manière très vraisemblable, l'émanation, dans l'air liquide, du radium condensé à très basse température.

Remarquons que si l'état *supragazeux* existait seul, il en résulterait un état de stabilité relatif qui ne se traduirait par aucun phénomène électrique apparent (le courant étant fermé)

ni par aucun phénomène de luminescence résultant de l'action de chocs. Cet état correspond, très vraisemblablement, à la production de l'odeur répandue par certaines substances, telles que le musc, qui, tout en imprégnant des volumes d'air considérables pendant un temps très long, ne perd pas de son poids d'une manière appréciable. Les métaux qui n'émettent pas de vapeurs proprement dites, tels que le cuivre et le fer, émettent une odeur.

Cette émanation est donc déjà voisine de celle qui correspond à l'état chaotique qui, comme nous le verrons, produit les apparences radioactives développées d'une manière plus ou moins sensible par les métaux.

Corollaire. — Supposons que sur une surface AB (fig. 13) se trouve une série d'ions orientés positivement; on dit alors que

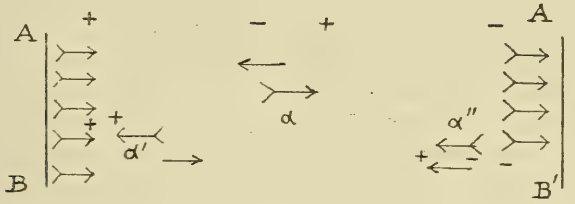


Fig. 13.

cette surface possède une charge positive. De même une surface A'B', munie d'ions orientés négativement, possède une charge négative.

Supposons un ion libre α dans l'espace intermédiaire et animé d'un mouvement de va-et-vient entre ces deux pôles. Admettons qu'il se déplace d'abord vers AB; en vertu de l'induction électrostatique, il tendra à renverser le sens de l'orientation de ces ions et lui-même subira ce renversement α'. Orienté de cette manière et repoussé en s'écartant de AB, il tendra toujours à produire sur cette surface le même résultat. Mais subissant le phénomène de l'influence, il reprend la forme α, atteint la surface A'B', où il détermine les mêmes effets, mais en sens contraire.

Il résulte donc de ceci qu'après un certain nombre de rencontres, les surfaces AB et A'B' sont complètement neutralisées, désorientées.

Remarquons encore que l'ion α', subissant des vibrations par suite de ses rencontres, transmettra l'énergie gyrostatique au milieu ambiant sous forme de chaleur si les oscillations sont très rapides, sous forme d'induction électro-magnétique si elles sont beaucoup plus lentes. Il est inutile d'ajouter que l'étincelle oscillante est le résultat des renversements α' α''.

En observant ce qui se passe dans les tubes de Crookes, les physiciens ont été bien surpris de remarquer que dans certains cas les ions émis par la cathode étaient chargés positivement. Nous voyons actuellement pourquoi; cela résulte simplement d'une persistance du renversement α' ou α''.

Tel serait le mécanisme du *courant thermique*, car, comme nous le verrons, les vibrations ioniques qui en sont la conséquence déterminent la dissipation de l'énergie.

Dans la théorie encore généralement en usage, on croit que des corpuscules mystérieux positifs et négatifs se déplacent en sens opposés pour neutraliser les pôles de noms contraires.

CHAPITRE II

L'état gazeux.

Formation de l'atome. — Pression interne et la force expansive des gaz. — La vibration ionique considérée : 1° comme étant la cause de la dilatation; 2° comme étant la cause de l'*embrayage* qui permet la transmission de l'énergie gyrostatique. — Notion du zéro absolu ou d'une température limite irréalisable à laquelle l'énergie du système ne se transmettrait plus, serait constante. — Réaction chimique, action catalytique, loi de Dulong. — Aptitude réactionnelle. — Valence. — Formules de structure. — Pression exercée par les gaz renfermant le même nombre de molécules. — Raies spectrales. — Cause de la stabilité apparente de l'atome. — Fausseté de la conception du point matériel. — Phénomène de Zeeman. — Remaniement à apporter à la théorie cinétique des gaz. — Induction électromagnétique du calorique, dans les substances iodynamiques et aniodynamiques. — Magnétisme et diamagnétisme. — Interprétation du radiomètre.

Il résulte des considérations que nous venons de développer, que l'emmagasinement de l'énergie pourra déterminer la production d'ions possédant des dimensions et des quantités d'énergie variables. Leur association pour la constitution de la chaîne ionique se fera dès lors de préférence de certaine manière, de façon à grouper les ions possédant les qualités voulues de forme et d'énergie. Il se produira dès lors des chaînes ioniques de diverses espèces qui constitueront les embryons des corps de la chimie.

Remarquons d'abord que ces chaînes ne possèdent par elles-mêmes aucune polarité, alors que les espèces chimiques possèdent, au contraire, celles-ci à un degré plus ou moins accentué. C'est une des raisons pour lesquelles nous sommes obligé d'admettre que ce que l'on appelle *atome chimique* est dû à l'enroulement des chaînes ioniques (fig. 14) qui constituent l'état *supragazeux* (nous verrons pourquoi ce dernier état correspond avec l'état radiant de Crookes ou aux gaz dans un état extrême de raréfaction).

Considérons le cas le plus simple, celui d'un gaz monoatomique à l'état gazeux renfermé dans un récipient sous une certaine pression. Le tourbillon atomique de longueur indéfinie se raccordera avec la surface A et B du récipient qui les renferme. De plus, remarquons que ces tourbillons vont donner lieu aux phénomènes suivants :

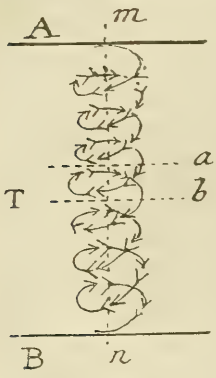


Fig. 14.

1° Si nous considérons deux spires consécutives parcourues par des courants parallèles, celles-ci s'attirent réciproquement, d'où la présence d'une force qui tend à réunir les parois A et B. *Cette force correspond à la pression interne,* laquelle se traduit par une attraction électro-magnétique. Ce que l'on désigne sous le nom d'atome correspond à une série d'ions de formes diverses qui constituent la fibre hélicoïdale;

2° Si nous considérons deux tourbillons venant à se rencontrer, ils rebondiront avec une vitesse d'autant plus grande que la vitesse de gyration est elle-même plus grande; c'est la quantité de mouvements ainsi développée qui détermine la pression, résultat de la production des chocs. Cependant, il y a lieu de faire cette remarque importante : *que le frottement capable de transmettre l'énergie de gyration d'un tourbillon et de la transformer en énergie de translation ou en une énergie quelconque n'existe que pour autant que les ions soient à l'état de vibration.* Cet état vibratoire constitue un véritable mode d'*embrayage;*

3° L'expérience de Bjerckness démontre que lorsque deux corps déformables vibrent dans un fluide d'une manière concordante, ceux-ci se repoussent; il en résulte que les vibrations ioniques tendent à éloigner ces ions les uns des autres, d'où tendance à la dilatation du système.

Quelle sera maintenant la forme de l'énergie qui déterminera pour nous la sensation de chaleur? Supposons que notre organisme soit constitué par des éléments récepteurs de forme identique ou

semblable à T, la température normale de notre organisme correspond à une quantité déterminée d'énergie gyrostatique autour de l'axe *mn*. Si un deuxième système T semblable se trouvait dans le voisinage immédiat du premier, et possédant une quantité d'énergie gyrostatique plus grande, celle-ci ne se transmettrait pas au système récepteur si les ions étaient dénués de mouvements vibratoires. Si, au contraire, la vibration ionique existe, il y a embrayage, transmission d'énergie de gyration par un moyen que nous indiquerons plus loin.

En résumé, nous voyons donc que si l'ion constitue l'élément transmetteur et récepteur de la sensation lumineuse, le tourbillon T constitue l'élément transmetteur et récepteur de la sensation de chaleur qui se traduit par un accroissement d'énergie gyrostatique autour de l'axe *mn*, mais qui ne peut se transmettre que grâce à l'existence des mêmes oscillations ou d'oscillations ioniques de même ordre que celles qui président à la sensation lumineuse.

La quantité de chaleur renfermée dans un corps correspond à la quantité d'énergie gyrostatique autour de l'axe *mn* et de l'axe de la fibre ionique, ces deux modes de gyration étant, du reste, liés l'un à l'autre. Elle peut être très grande sans que le récepteur sensible puisse s'en apercevoir ou que le thermomètre puisse la manifester; il en sera ainsi lorsque les vibrations ioniques sont faibles. Enfin, s'il était possible de supprimer complètement le mouvement vibratoire, c'est-à-dire l'existence de toute radiation appartenant à l'ordre des radiations lumineuses, l'énergie calorifique ou gyrostatique ne pourrait plus se transmettre et la quantité de chaleur renfermée dans le corps serait constante.

Nous aurions atteint alors la température que l'on désigne sous le nom de *zéro absolu*, température irréalisable pour des raisons d'ordre thermodynamique que nous indiquerons plus loin et irréalisable physiquement par cela que l'absence de vibrations déterminerait le contact réel des éléments, d'où frottement, mise en liberté de l'énergie atomique, destruction de ce qu'on appelle matière. En réalité, l'éther vibrant joue le rôle

d'un fluide transmetteur et du lubréfiant empêchant le *grippement* des éléments matériels.

Nous voyons également qu'au zéro absolu la matière renfermerait d'énormes quantités d'énergie qu'elle ne pourrait transmettre si cette température était réalisable : l'embrayage serait supprimé.

Comment le tourbillon atomique que nous venons de concevoir manifestera-t-il un caractère électro-positif ou électro-négatif? Comment pourra-t-il se combiner avec un autre élément?

Dans l'état où nous venons de le concevoir, le gaz est inerte, les ions sont dans un état d'équilibre dynamique parfait. Mais supposons que l'atome se trouve dans un état d'équilibre moins stable, c'est-à-dire que, par suite de l'action de la force centrifuge, un certain nombre d'ions pivotent autour de l'atome de manière à constituer des chaînes ouvertes *c* (fig. 15), et qui constitueront, en réalité, autant de *crochets réactionnels*. Ceux-ci seront électro-positifs ou électro-négatifs, suivant leur orientation qui correspondra à la figure A positive ou à la figure B négative.

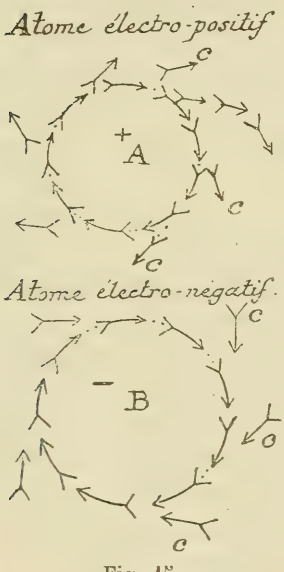


Fig. 15.

Remarquons que l'un des meilleurs moyens de provoquer cet état de l'atome consiste à le mettre en présence d'un autre atome déjà doué de cette propriété, c'est l'*action catalytique* des chimistes, la radioactivité induite des physiciens. Nous verrons dans le chapitre suivant que cet état de choses se trouve réalisé à un haut degré dans les particules qui constituent les milieux troubles et dans celles qui constituent les solutions colloïdales. Des rayons à petite longueur d'onde tendront également à produire ce résultat en vertu de l'action répulsive qui est communiquée aux ions par la vibration. Tel est le cas de la combi-

naison du chlore et de l'hydrogène en présence de la lumière et de vapeur d'eau comme agent catalytique.

Nous dirons que dans ces conditions les atomes sont *iodynamiques*.

Concevons deux gaz monoatomiques (c'est-à-dire dont la molécule se confond avec l'atome dans l'ancienne théorie); nous pouvons également les considérer comme *monovalents* pour simplifier la question. Ces gaz sont également susceptibles de se combiner.

Supposons ceux-ci mélangés dans la proportion indiquée par les poids atomiques. Ils possèdent chacun la même somme déterminée d'énergie de gyration ou, ce qui revient au même, la même somme d'énergie de translation, puisque ces quantités sont proportionnelles. Ils exercent, de plus, par atome ou par spire d'enroulement, la même pression.

Nous dirons donc que l'atome doit se définir comme étant *la quantité d'énergie, toujours la même, que possède un volume donné d'un corps simple à l'état gazeux dans les mêmes conditions*. Nous représentons cette énergie par l'unité. Les poids atomiques sont *les poids relatifs de matière qui renferment cette énergie toujours la même*.

Cette proposition correspond avec la loi de Dulong et Petit, qui en constitue la vérification.

Il résulte de ceci que la matière n'est susceptible de se combiner que par quantités d'énergies gyrostatiques égales.

Nous voyons également que si les deux gaz viennent à se combiner, les tourbillons se soudront deux à deux et le volume sera diminué de moitié. Il importe de remarquer que deux systèmes gyrostatiques soudés ne transforment pas plus d'énergie de gyration en énergie de translation qu'un seul gyrostat libre, l'impulsion se communiquant de la même manière, dans les deux cas, par une seule génératrice.

Il résulte de cette considération, que nous pouvons appliquer aux gaz biatomiques ou polyatomiques ce que nous venons de dire des gaz monoatomiques. Toutes choses étant égales, la pression sera proportionnelle au nombre de molécules et non au nombre d'atomes.

Le mécanisme de la réaction peut se concevoir de la manière suivante :

Deux gyrostats A et B (fig. 16) deviennent d'abord iodynamiques sous une influence extérieure, et dès lors les ions libérés des deux tourbillons s'emboîtent de manière à constituer une

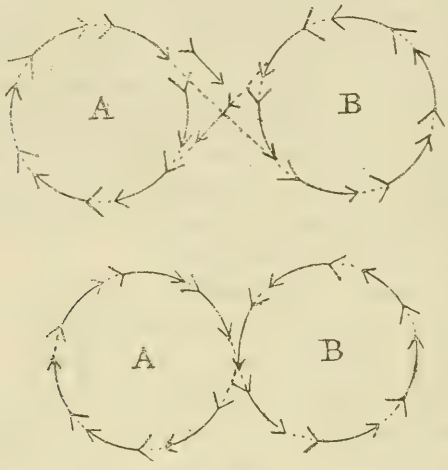


Fig. 16.

chaine tendue intermédiaire. Sous l'action de cette tension, les deux gyrostats deviennent tangents et la combinaison est réalisée.

L'*aptitude réactionnelle* dépendra de la facilité plus ou moins grande avec laquelle l'iodynamisme s'établira.

Il est facile de voir que le sens de la gyration doit exercer une influence sur le sens et l'orientation des projections ioniques ; les mêmes corps simples peuvent posséder des aptitudes réactionnelles différentes.

La *valence maxima* dépendra du nombre d'*ions crochets* de chaque atome, de chaque quantité de substance qui renferme la même quantité d'énergie.

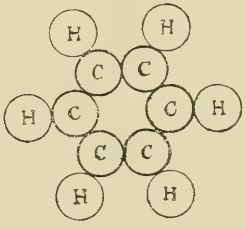
Les formules de structure conservent leur signification, et nous pouvons continuer à les représenter par la section droite

des fibres gyrostatiques de longueur indéfinie qui constituent les gaz.

Considérons, par exemple, le cas simple CH_4. Si nous admettons que, toutes choses étant égales, les vapeurs de carbone et d'hydrogène renferment le même nombre de fibres, chaque fibre, après la combinaison, sera représentée par la figure 17.

CH_4

Fig. 17.



C_6H_6

Fig. 18.

La chaîne-benzine serait représentée par la figure 18, et l'on remarque que par suite de cette disposition l'atome de carbone devient réellement trivalent.

En résumé, nous voyons que les différents gaz renferment, toutes choses étant égales, le même nombre de spires simples ou composées. Ce qui se traduit par *le même nombre de molécules*, dans l'ancienne théorie.

On peut démontrer qu'il en est réellement ainsi à l'aide du raisonnement élémentaire connu, et qui s'applique de la même manière que dans la théorie des gaz. Puisque l'énergie de translation est proportionnelle à l'énergie de gyration, on peut écrire pour deux gaz différents :

$$P = NMV^2 = N'M'V'^2.$$

D'où, si la température est la même,

$$N = N',$$

c'est-à-dire que les deux gaz renferment le même nombre de spires gyrostatiques.

L'image la plus parfaite de la molécule est celle d'un câble formé lui-même par des éléments tordus; on peut également le concevoir droit ou gauche. L'acide tartrique droit ou gauche constitue un exemple intéressant.

Il est facile de se rendre compte maintenant de la cause de l'apparition des raies spectrales. Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer dans le chapitre précédent, le Dr Gustave le Bon a démontré par l'expérience que les ions ne sont pas identiques entre eux; chacun est donc capable, à l'instar d'un timbre, de rendre une note lumineuse parfaitement définie. Cependant, pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'il soit libre, de même que les ions c (fig. 15); il faut, de plus, qu'il subisse un choc, condition qui est réalisée au moment où l'ion pénètre dans l'atome. Il y a à ce moment phosphorescence avec absorption de chaleur et reconstitution ou *genèse de l'atome.*

Il existe donc au moins autant d'ions de dimensions différentes qu'il existe de raies spectrales. Le dernier élément matériel qui doit être considéré *par les chimistes et par les physiciens* est l'ion, ce qui ne veut nullement dire que l'éther ou l'ion d'éther représente les limites d'enroulement de la substance. L'éther semble déjà très voisin de la matière et correspondrait à un *ordre d'enroulement* également très avancé.

On peut se demander comment il se fait que l'atome, malgré cette complexité, présente une si grande stabilité apparente. Un exemple familier fera saisir notre pensée à ce sujet. Imaginons une série de jeux de patience dont toutes les pièces sont mêlées. Dans ces conditions, il est peu vraisemblable que la juxtaposition de celles-ci puisse aboutir à plus d'une combinaison correspondant à la reconstitution des différents jeux. Dans cette comparaison, les pièces constitutives représentent toutes les formes ioniques capables de s'emboîter et les jeux représentent les atomes ou les tourbillons dont nous venons de parler.

Cependant, il n'est pas absolument impossible de concevoir plus d'un arrangement avec les mêmes éléments. C'est ainsi que des expériences tendent à prouver que l'*arrangement hélium* peut se transformer en *arrangement radium.*

L'une des plus fausses conceptions, constamment mise en usage par les physiciens, est la conception du *point matériel*, c'est-à-dire d'une masse matérielle *indéfiniment petite* et douée de certaines propriétés mystiques d'attraction, de répulsion, etc. En effet, si, par la pensée, nous diminuons indéfiniment un volume occupé par la matière, nous aurons à considérer des milieux qui s'éloignent de plus en plus de ce que nous appelons *matière*, et qui en diffèrent même complètement. L'individu chimique est en tout point comparable à l'individu physiologique, il vit en assimilant et en désassimilant; l'assimilation détermine la phosphorescence, la désassimilation détermine la radioactivité, ainsi que nous le verrons dans le chapitre relatif à l'état solide.

L'une des plus intéressantes applications de notre théorie est celle qui est relative à l'expérience de Zeeman, prévue, comme on le sait, par Lorentz, dont la théorie peut être considérée, à certains égards, comme équivalente.

Concevons une fibre atomique constituée par une série de chaînes ioniques concentriques animées de mouvements gyratoires dirigés dans le sens de la flèche (fig. 19). L'orientation des

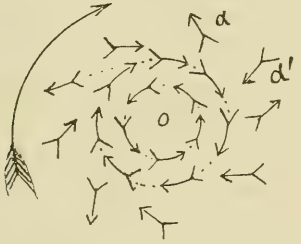


Fig. 19.

ions, c'est-à-dire du courant électrique, peut du reste varier avec la chaîne hélicoïdale considérée.

Si, par suite d'une action extérieure, l'équilibre des chaînes vient à être rompu, les ions peuvent être projetés au dehors, ainsi que l'indiquent les ions α; ils seront orientés dans deux sens opposés. En s'échappant de l'atome, ils pourront déterminer des phénomènes radioactifs; en y rentrant, ils détermineront le phénomène de la luminescence.

Si nous soumettons ces systèmes à l'action d'un autre courant circulaire ou à l'action de l'aimant, ils s'orienteront de telle manière que l'axe du tourbillon coïncidera avec la ligne de force magnétique. Nous pouvons dès lors prévoir que la lumière qui sera émise par une vapeur métallique introduite dans une flamme et soumise à l'action d'un champ magnétique présentera les particularités suivantes :

1° Si l'on observe les raies spectrales suivant la direction des

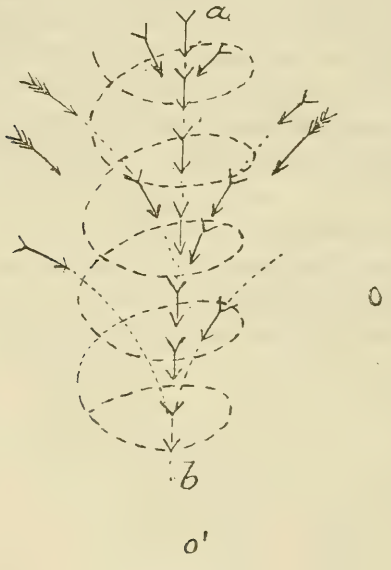


Fig. 20.

lignes de force magnétiques, elles seront polarisées circulairement;

2° Le sens de la rotation dépendra du sens du courant; α et α' fourniront donc des lumières polarisées circulairement en sens contraire;

3° La lumière observée normalement aux lignes de force sera polarisée rectilignement.

Si nous considérons le tourbillon atome vu dans le sens de sa longueur (fig. 20), nous pouvons également concevoir une

chaîne ionique axiale vers laquelle les ions libres pourront être aspirés.

Les ions, en pénétrant dans cette chaîne axiale, émettront donc de la lumière polarisée rectilignement, dont l'un des plans de vibration correspondra avec le plan *o*, *ab*, l'observateur étant en *o*. Mais le mouvement vibratoire ne pouvant se communiquer que normalement à la chaîne ionique *a*, *b*, il en résulte qu'un observateur *o'*, dont le rayon visuel est dirigé suivant la direction *a*, *b*, *ne percevra plus de lumière*, ce que l'expérience démontre.

Nous avons évidemment considéré le cas le plus simple; nous pourrons encore admettre, par exemple, l'existence d'atomes-tourbillons dont le sens de la rotation est l'inverse de celui que nous avons considéré. Dans ces conditions, on pourra observer, dans le sens des lignes de force, quatre raies polarisées circulairement au lieu de deux.

Le phénomène de Zeeman nous conduit donc à cette conclusion de la plus haute importance, que l'axe du tourbillon atomique est occupé par une chaîne ionique. L'état *supragazeux* est donc *emboîté* dans l'*élément gazeux*, et le tourbillon-éther est *emboîté* dans la fibre supragazeuse elle-même. Nous verrons plus loin quelles sont les réflexions philosophiques que cette conséquence suggère, ainsi que les conséquences qu'on peut en déduire en se plaçant au point de vue des divers modes d'attraction.

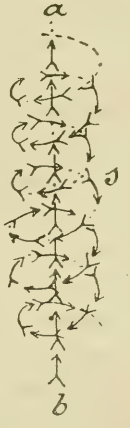


Fig. 21.

L'élément matériel tel que nous devrons le considérer, non seulement dans l'état gazeux, mais encore dans les états *solide* et *liquide*, se compose donc de fibres ioniques enroulées en hélice (fig. 21), dont l'axe est occupé par une fibre ionique rectiligne, l'axe de fibre ionique étant lui-même occupé par la fibre d'éther gyrostatique.

La quantité d'énergie gyrostatique renfermée dans ce système a été désignée sous le nom de quantité de chaleur.

Deux corps sont dits en équilibre de température, lorsque

leurs éléments gyrostatiques ne perdent ni ne gagnent de l'énergie gyrostatique ; l'énergie communiquée au milieu ambiant par induction électro-magnétique est égale à la quantité d'énergie reçue par le même processus. De plus, lorsqu'un corps déterminé est à une température donnée, tous les gyrostats possèdent *individuellement* (toutes choses étant égales) la même quantité d'énergie de gyration.

Dans la théorie cinétique des gaz actuellement admise, on admet que la vitesse *moyenne* de translation est constante et l'on suppose que c'est cette énergie de translation qui correspond à l'énergie calorifique.

Cette conception est en contradiction avec le principe de la conservation de l'énergie, car, comme on l'a très justement fait remarquer, si l'on suppose le vase renfermant le gaz divisé en deux compartiments, et que la paroi de séparation soit munie de clapets laissant passer les molécules rapides et retenant les molécules lentes, on conçoit la possibilité théorique d'établir une chute de température sans dépense de travail.

Cependant, il eût été malheureux si cette théorie avait été abandonnée, car elle renferme *une part de vérité*. Ce sont bien les chocs des éléments qui déterminent la pression, et la force vive de translation est bien *proportionnelle* à la température. Ce sont là déjà des vérités importantes, mais on a eu tort de conclure que la quantité de chaleur représente cette force vive de translation des molécules, alors qu'il n'y a que simple proportionnalité. En réalité, la quantité de chaleur est représentée par l'énergie de gyration des molécules, et cette énergie est la même *pour chaque molécule* ou pour chaque atome à une température donnée. Si, à un moment donné, une certaine quantité de cette énergie vient à être transformée en énergie de translation, elle est immédiatement compensée par le milieu éthéré ambiant, et l'inverse aurait lieu si le mouvement gyratoire tendait à être accru.

Si donc nous supposons une molécule rapide pénétrant par le clapet, elle n'aurait nullement pour effet d'accroître la température, et cet excès de vitesse n'étant que *momentané* et ne

dépendant que du mode accidentel de la dernière rencontre, elle n'aura pas pour résultat non plus d'accroître la pression d'une manière permanente.

La différence fondamentale qui existe entre deux gaz à températures différentes se trouve dans la différence d'énergie gyrostatique de leurs éléments. Les vitesses *moyennes* de translation dues aux rencontres seront plus grandes lorsque la température est plus élevée, lorsque la vitesse, toujours la même, des divers éléments est plus grande. Mais il se peut, comme le dit Clausius, que certains éléments du gaz à basse température aient à un instant donné une vitesse de translation plus grande, *d'où nous ne conclurons pas avec ce physicien que la température de cette molécule est plus élevée.*

Il est facile de voir maintenant comment l'énergie de gyration se transmettra à distance d'un élément matériel à un autre.

Concevons à cet effet l'espace tout entier occupé par des fibres d'éther gyrostatique (fig. 22) roulant les unes sur les autres, chacune d'elles possédant par conséquent un sens de gyration déterminé et toujours le même. Considérons la fibre A, par exemple, tournant de gauche à droite sous l'action des gyrostats voisins.

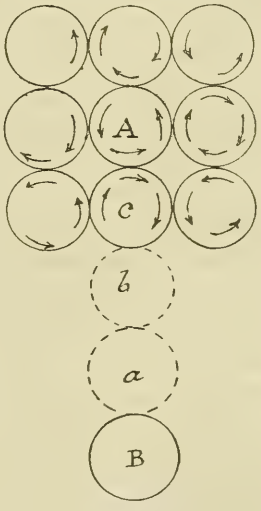


Fig. 22.

Supposons que ce soit la fibre A qui occupe l'axe de la fibre ionique *a, b* (fig. 21). Si, à une certaine distance, se trouve une deuxième fibre occupant l'axe d'un autre élément B, il est facile de concevoir que si B possède une plus grande énergie de gyration que A, l'équilibre de température s'établira par l'intermédiaire des fibres *a, b, c*. Cependant, il ne pourra en être ainsi qu'en supposant les fibres B, *a, b, c*, A *embrayées*, c'est-à-dire douées d'un frottement réciproque permettant la transmission du mouvement. Or, il ne peut en être ainsi que si ces fibres sont

douées de mouvements vibratoires dans le sens de la longueur des fibres, ou normaux au sens de la propagation A, B, oscillations qui sont déterminées par la vibration des ions de la chaîne *a*, *b* (fig. 21).

Cet accroissement de vitesse de gyration de la fibre éthérée A se communique à la chaîne ionique dont elle occupe l'axe, laquelle la communique à la spirale matérielle *s*.

Remarquons dès à présent que l'on peut concevoir quatre gyrostats si l'on se place au point de vue du sens du mouvement et de l'orientation ionique : ce sont les gyrostats A, B, C, D (fig. 23).

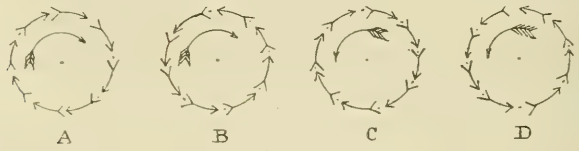


Fig. 23.

L'induction de l'énergie calorifique de B en A peut se nommer encore *induction électro-magnétique*. La seule différence d'effet apparent se trouve dans le nombre des vibrations.

Lorsque nous déterminons une demi-oscillation ionique par l'introduction d'un courant dans un circuit, nous provoquons à distance une pulsation correspondant au renversement des ions et en même temps l'embrayage, d'où transmission d'énergie de gyration et propulsion éthérée en sens inverse, dans l'induit.

Le mode de communication de l'énergie gyrostatique par la fibre axiale est le seul que l'on puisse considérer si le tourbillon-atome est en équilibre. La substance formée par un assemblage d'éléments en équilibre dynamique est non conductrice de l'électricité, *aniodynamique ;* sa conductibilité calorifique est faible, ainsi que son pouvoir absorbant, car il est généralement transparent, il l'est dans tous les cas à un degré plus élevé que les conducteurs.

Nous pouvons dire dès à présent que ce mode de transmission de l'énergie est celui qui s'exécute le plus difficilement.

Mais supposons maintenant un état de la matière, que nous désignerons sous le nom d'état *iodynamique*, où les chaînes ioniques en partie déroulées relient les atomes les uns aux autres (fig. 24). Dans ces conditions, la matière possède en partie les propriétés de l'état supramatériel. Elle devient conductrice de l'électricité, et la fibre gyrostatique d'éther, au lieu d'être obligée de s'adresser à la fibre axiale pour communiquer l'énergie, trouve à sa disposition des fibres ioniques pour ainsi dire *à nu*, avec lesquelles elles communiquent avec la plus grande facilité. L'énergie gyrostatique transmise par l'éther, au lieu de se communiquer exclusivement à la fibre axiale A, se communique principalement aux fibres ioniques *a-b*, qui elles-mêmes la communiquent aux fibres hélicoïdales, avec lesquelles elles sont unies. Aussi, les conducteurs de l'électricité ne sont-ils pas transparents et sont-ils très bons conducteurs de la chaleur. On peut, du reste, démontrer par le calcul que si l'on considère la quantité de chaleur transmise par le processus axial, comme négligeable par rapport à celui que nous venons de considérer, il y a proportionnalité entre la conductibilité calorifique et la conductibilité électrique.

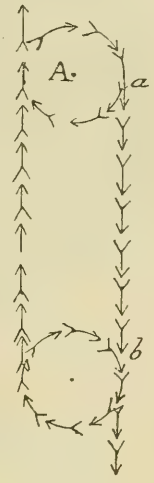


Fig. 24.

Nous voyons également pourquoi cette relation cesse d'être vraie pour les diélectriques et les mauvais conducteurs où l'action de la chaîne libre devient nulle ou négligeable. (Voir le chapitre des *Solides.*)

Si l'on pouvait réaliser la température désignée sous le nom de zéro absolu, les ions constitutifs des chaînes conserveraient rigoureusement leurs distances mutuelles et leur forme, d'où absence de vibration, absence d'induction électrostatique et électro-magnétique ou d'embrayage ; la matière conserve son énergie et ne la transmet plus; la force expansive et la chaleur *apparente* des gaz est nulle. Les courants qui parcourent la matière en tous sens sont devenus *athermiques.*

Il est maintenant facile de voir quels seront les atomes magnétiques, diamagnétiques et dénués de magnétisme.

Ainsi que nous venons de le voir, on doit admettre que le tourbillon-atome est formé par une série de chaînes circulaires ou, plus exactement, hélicoïdales, emboîtées les unes dans les autres; le sens du mouvement de gyration des ions est le même, mais l'orientation de ceux-ci peut être différente ou, en d'autres termes, les courants d'éther gyrostatiques, les courants électriques peuvent être doués de sens différents.

Cela étant, considérons la section d'une fibre atomique F (fig. 25). Les ions des diverses spires sont orientés dans le même

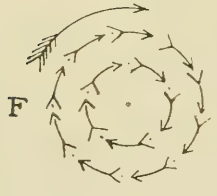


Fig. 25.

Fig. 26.

sens, il en est par conséquent ainsi du sens des courants électriques.

Un tel élément s'orientera sous l'action de l'aimant, comme le ferait un solénoïde. Il sera par conséquent magnétique, il sera attiré par l'aimant.

Supposons maintenant que les courants soient orientés dans deux sens opposés (le sens de la rotation est le même) (fig. 26). Si ces deux courants subissent la même action d'orientation de la part du courant aimant, la substance ne sera ni magnétique ni diamagnétique. Nous aurons l'image d'un solénoïde astatique.

Supposons maintenant que nous fassions varier l'intensité du courant *b* par rapport à l'intensité du courant *a*, l'*action* résultante sur le courant aimant sera

$$2\pi ri - 2\pi Ri',$$

et supposons cette action répulsive, c'est-à-dire le courant aimant dirigé en sens contraire du courant résultant, nous admettrons

$$2\pi ri > 2\pi \mathrm{R}i' \quad \text{ou} \quad ri > \mathrm{R}i';$$

c'est donc l'action du courant intérieur qui l'emporte.

Cet état d'équilibre sera stable ou instable. Il sera stable si l'action d'orientation du circuit extérieur l'emporte sur l'action d'orientation du circuit intérieur, ou si l'on a

$$2\pi \mathrm{R}i' \times \mathrm{R} > 2\pi ri \times r$$

ou

$$\mathrm{R}^2 i' > r^2 i.$$

Supposons, par exemple,

$$\begin{array}{rrrrrr} r = 1 & \mathrm{R} = 4 & & & & \\ i = 5 & i' = 1 & & & & \\ ri = 5 & \mathrm{R}i' = 4 & \text{ou} & 5 > 4 & \text{ou} & ri > \mathrm{R}i' \\ r^2 i = 5 & \mathrm{R}^2 i' = 16 & \text{ou} & 16 > 5 & \text{ou} & \mathrm{R}^2 i' > r^2 i. \end{array}$$

Ce système s'orientera par répulsion, il sera diamagnétique.

Si, au contraire, les dimensions sont telles qu'il y a à la fois action répulsive résultante et si l'action d'orientation du circuit intérieur l'emporte, le corps sera magnétique.

$$ri > \mathrm{R}i' \quad \text{et} \quad r^2 i > \mathrm{R}^2 i'.$$

Supposons, par exemple,

$$\begin{array}{rr} \mathrm{R} = 1 & \mathrm{R} = 2 \\ i = 1 & i' = 0{,}2 \\ ri = 1 & \mathrm{R}i' = 0{,}4 \\ r^2 i = 1 & \mathrm{R}^2 i' = 0{,}8. \end{array}$$

Ce système sera magnétique, il s'orientera par attraction.

Nous pouvons, dès lors, construire le modèle (fig. 27) suivant, qui s'orientera, par attraction ou par répulsion, suivant le rapport des intensités des courants inverses qui passent dans le circuit intérieur et dans le circuit extérieur.

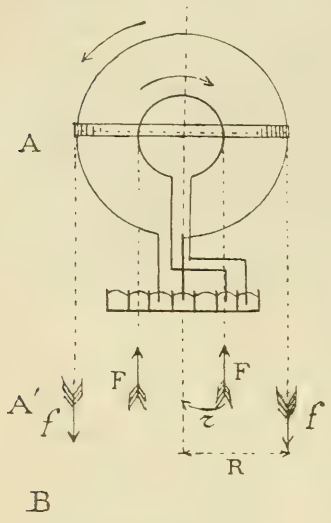


Fig. 27.

Supposons, en effet, que les circuits A indiqués en coupe en A' soient soumis à l'action d'un circuit placé en B, dont le sens du courant est le même qu'en A. Cela étant, ce circuit sera attiré avec une intensité f, et le circuit intérieur sera repoussé avec une intensité F, correspondant à l'intensité du courant de ce circuit.

Si donc nous avons $F > f$ et $fR > Fr$, le système s'orientera par répulsion et fournira l'image de la substance diamagnétique. Si, au contraire, nous avons $fR > Fr$ et $f > F$, le système s'orientera par attraction et fournira l'image de la substance magnétique.

Interprétation du radiomètre. — On admet habituellement que la rotation du tourniquet du radiomètre peut s'expliquer par la théorie des gaz actuellement admise et d'après laquelle le côté noirci de la palette ayant une température plus élevée que le côté opposé, le mouvement d'agitation des molécules du gaz y est aussi plus intense, d'où quantité de mouvement ou force de propulsion plus grande.

Cependant cette conception simple est renversée par cette objection, que le phénomène doit être indépendant de la distance des éléments. Or, sous la pression normale, le radiomètre ne fonctionne pas, et cependant, même dans ces conditions, l'inertie de l'air à mettre en mouvement est négligeable par rapport à l'inertie du moulinet lui-même. L'ancienne théorie est donc insuffisante.

Au contraire, il est facile de voir, à l'aide de la conception nouvelle, qu'il doit en être ainsi. En effet, l'élément gyrostatique du gaz (fig. 14) est relié à la paroi solide du vase par ses deux extrémités, c'est la tension de ce ressort qui correspond à la pression interne alors que les chocs latéraux correspondent à la pression du gaz supposé parfait (dans l'ancienne théorie). Cependant, si l'on vient à écarter progressivement les parois A et B du vase ou, en d'autres termes, si l'on vient à accroître le vide, il arrivera un moment où l'hélice déroulée nous fournira l'image de l'état *supragazeux* (fig. 28). A l'action électro-magnétique de deux spires consécutives sera substituée l'action électrostatique de deux ions consécutifs.

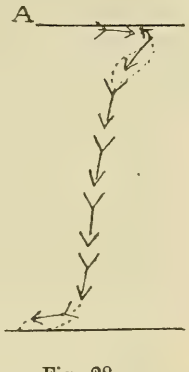


Fig. 28.

Or, remarquons que si la surface A, par exemple, est à une température relativement élevée, les pulsations synchrones consécutives des ions seront aussi relativement intenses, par conséquent leur action répulsive réciproque sera relativement grande. Nous voyons donc que si la face opposée est à une température moins élevée, l'action répulsive produite sur la première face l'emportera sur l'action répulsive produite sur la seconde.

CHAPITRE III

État liquide.

Texture fibreuse des gaz et des liquides. — Vapeur saturée. — État critique. — Tension superficielle. — Effets thermiques dus à la détente et à la compression. — Variation de volume de la fibre-molécule par suite d'une variation de température. — Des solutions. — Pression osmotique. — Électrolytes. — Substances ionisées et iodynamisées. — Réactions exothermiques et endothermiques. — Hydrates. — Électrolyse. — Asymétrie des pôles. — Effets produits par les projections cathodiques et anodiques — Électrodes attaquables. — Courant athermique et courant thermique, courant électrolytique. — Phénomènes analogues dans les gaz raréfiés. — État particulaire. — Action de l'état particulaire sur la végétation. — Plantes bipôles. — Rosée. — Origine de l'électricité atmosphérique. — Des orages. — Des aurores polaires.

Il résulte de ce que nous venons de dire dans le chapitre précédent, que la texture du gaz est fibreuse. Il est facile d'en montrer la réalité en observant que de la fumée formée de particules très déliées, telle que la fumée de tabac, s'étale suivant ces fibres, tout en fournissant l'apparence bien connue.

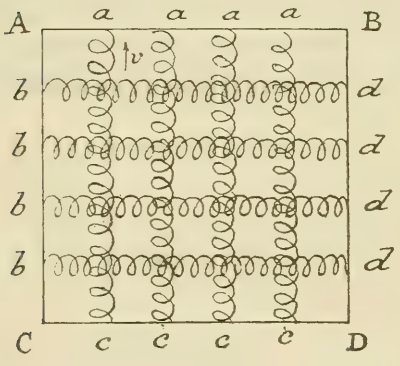


Fig. 29.

Le même phénomène se remarque pour les liquides; si l'on introduit dans de l'eau, par exemple, une goutte d'une solution très colorée, on remarque que celle-ci, au lieu de se disséminer indifféremment suivant toutes les directions, se comporte comme la fumée en fournissant l'image de fibres parfaitement définies.

Considérons l'image de l'état gazeux d'après laquelle les fibres gyrostatiques peuvent être ramenées à deux directions rectangulaires (fig. 29).

Cela étant, la tension des fibres *a*, *c*, *b*, *d* déterminera sur les parois une action contractile qui tendra à les rapprocher les unes des autres, action qui représente la *pression interne* π. Au contraire, ces mêmes fibres, rebondissant les unes sur les autres et animées d'une vitesse de translation moyenne *v*, détermineront sur ces mêmes parois les chocs qui tendent à les écarter.

Cela étant, si l'on suppose les parois mobiles et si l'on représente par P la pression extérieure, l'équilibre sera réalisé lorsque l'on a

$$P + \pi - k = 0,$$

k représentant l'action résultante des chocs.

La force expansive du gaz sera donc représentée par

$$P = k - \pi.$$

Cela étant, si l'on accroit la valeur de P, deux cas pourront se présenter : ou bien P pourra croître indéfiniment, ou bien il arrivera un moment où P atteindra une valeur limite constante ; à partir de cette limite, $P + \pi$ l'emportera sur la valeur de *k*, les fibres gyrostatiques seront ramenées les unes vers les autres de manière à amener le pseudo-contact des gyrostats qui rouleront désormais les uns sur les autres. L'état liquide sera obtenu. Chaque fibre atomique se comporte en réalité comme un ressort qui se détend et dont les spires retombent les unes sur les autres.

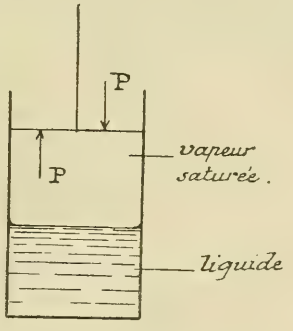


Fig. 30.

La température à laquelle cette transformation a été réalisée a été désignée sous le nom de *température de condensation*, et la pression P (fig. 30) à partir de laquelle se produit la précipitation des éléments les uns vers les autres, a été désignée sous le nom de *tension maxima*, et la substance gazéiforme à ce moment, sous le nom de *vapeur saturée*.

Si, au lieu de permettre aux parois mobiles de suivre la substance dans son mouvement de condensation, deux phases de la matière sont en présence, l'une qui correspond à l'état liquide, l'autre qui correspond à l'état de vapeur saturée.

Mais si nous considérons des températures croissantes, il arrivera un moment où la substance dans la phase vapeur occupera un volume double du volume dans la phase liquide. D'après nos observations, ce sera là la limite du phénomène correspondant à la dualité des phases. La pression correspondante sera désignée sous le nom de *pression critique*, et les densités correspondant aux volumes 2 et 1 de la vapeur et du liquide seront les *densités critiques* du liquide et de la vapeur. Au delà de cette limite, toute variation de volume entraîne une variation de pression.

Il est facile de voir, comme nous l'avons dit, quelles sont les causes qui déterminent la variation de volume lors de la condensation. D'une part, les chocs latéraux ne pouvant plus équilibrer la tension des fibres, celles-ci seront ramenées les unes vers les autres, mais, d'autre part, et réciproquement, les fibres, n'étant plus tendues par l'action des chocs, se détendront de

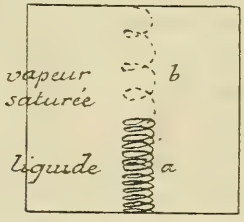


Fig. 31.

manière à fournir l'image *a* (fig. 31), qui représente l'élément que nous avons désigné sous le nom de *molécule liquidogénique*, l'élément *b* tendu correspondant à la *molécule gazogénique*.

Cependant, entre ces deux états, dont l'un correspond à une sorte d'équilibre résultant d'un pseudo-contact, et l'autre à une action expansive correspondant à l'état gazeux, naîtra un état

d'équilibre intermédiaire correspondant à une *tension* ou *expansion négative*. Cet état intermédiaire est l'*état superficiel* siège d'une tendance perpétuelle vers l'état liquide sans pouvoir le réaliser.

L'image d'une goutte liquide au sein de sa vapeur sera représentée par la sphère G (fig. 32) entourée d'un réseau de fibres gyrostatiques T plus tendues que les fibres *t* qui correspondent à la vapeur saturée ambiante.

Lorsque ces tensions sont devenues égales par suite de l'accroissement de température et de l'accroissement de pression, nous avons atteint la température critique. Le réseau tendu T ne sépare plus la masse liquide de la masse gazeuse.

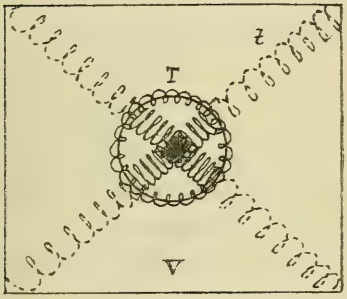


Fig. 32.

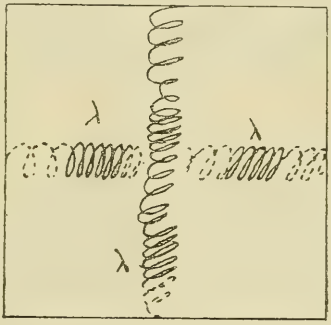


Fig. 33.

A partir du point critique, les fibres *t* existent seules, l'état gazeux est établi.

Mais on peut admettre que si le liquide G est en excès dans le vase V, on continuera à rencontrer sur la longueur de la fibre des espaces occupés par des espèces de nœuds (fig. 33) où le *pseudo-contact* continuera à être réalisé de même que dans l'état liquide ; cet état ne s'est pas complètement *dénoué*. C'est ce mélange hétérogène qui constitue l'état *pseudo-gazeux*. Nous examinerons plus loin une hypothèse plus probable lorsque nous parlerons de l'état *particulaire*.

Il résulte de la persistance de cette espèce de coagulation, qu'au-dessus de la température critique à une même température

et à une même pression pourront correspondre des densités différentes.

Si donc la première partie du cycle qui correspond au passage de l'état gazeux à l'état liquide s'effectue très simplement, si au-dessus de la température critique nous ne constatons, dans ces conditions, qu'une seule densité correspondant à une température et à une seule pression, il en est autrement si nous considérons la transformation inverse. Dans ce cas, des molécules liquidogéniques pourront continuer à exister en proportion variable au sein de la masse gazeuse, suivant les conditions de remplissage du tube.

Le nombre de ces molécules atteindra son maximum lorsque le ménisque disparaît à la partie supérieure du tube, et il sera sensiblement nul si le ménisque disparaît à la partie inférieure.

Si nous reprenons notre équation relative aux gaz

$$P = K - \pi,$$

dans laquelle P représente la force expansive du gaz, et si nous substituons maintenant au gaz un liquide remplissant complètement le vase (fig. 30), l'action électro-magnétique π l'emportant sur K, la valeur de P sera négative de telle manière que pour écarter les parois, il faudra exercer une traction P, alors que dans le premier cas il fallait exercer une pression. (La valeur de P atteint environ 50 atmosphères pour l'eau.)

Nous aurons donc l'équation

$$- P = K - \pi.$$

A la température critique, on aura $- P = 0$, c'est-à-dire que les parois ne seront soumises à aucune pression. Il en sera ainsi *à condition que la phase liquide soit seule présente.* L'ébullition est alors impossible, ainsi que nous l'avons observé sur l'amylène.

Si la vapeur est en présence du liquide, on aura

$$- P = K - (\pi + t),$$

t étant la tension de vapeur qui s'ajoute à la pression interne; de telle manière qu'à la température critique

$$-P = 0 \quad \text{ou} \quad t = K - \pi,$$

équation caractéristique des gaz.

Il est facile de voir également que le liquide sera mouillant si les fibres du solide et du liquide sont suffisamment semblables pour qu'elles puissent s'adapter les unes aux autres. Si l'adaptation est imparfaite, le liquide mouillera mal; il en est, par exemple, ainsi pour l'eau et le verre; si, au contraire, elle est

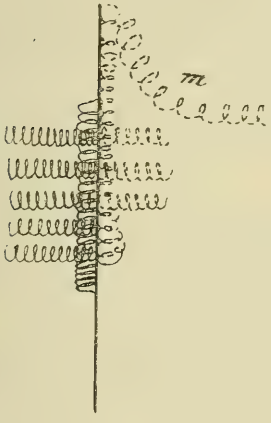


Fig. 34.

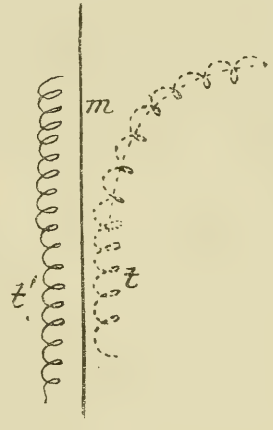


Fig. 35.

parfaite, les fibres liquides, grâce à leur mouvement hélicoïdal, tendront à imbiber la totalité de la surface solide; il en est ainsi, par exemple, pour le pétrole, qui possède la propriété de contourner la surface des vases qui le renferment.

C'est cette même adaptation des fibres qui facilite la condensation lorsqu'une vapeur est en contact avec un solide.

Nous voyons également que l'état de tension des fibres superficielles détermine la production du ménisque concave m (fig. 34).

Au contraire, le liquide ne mouillera pas s'il n'y a pas adaptation. Dans ces conditions, la tension des fibres superficielles déterminera la production du ménisque convexe (fig. 35).

Les tourbillons t et t' exercent, comme on le voit, des actions répulsives apparentes, identiques à celles qui se produisent dans l'état gazeux et qui résultent des chocs latéraux de ces éléments (état sphéroïdal).

C'est encore la même cause transposée dans le milieu éther qui détermine la répulsion des lignes de tourbillon de force électro-magnétique ou électrostatique.

Effets thermiques dus a la détente ou a la compression. — Il est aisé de se rendre compte de l'action thermique déterminée par la détente d'un gaz, c'est-à-dire par la détente de la *spirale-molécule* constituée par des courants sensiblement parallèles et de même sens. L'écartement des spires déterminera une induction électro-magnétique ayant pour résultat d'accroître l'intensité du courant. L'accroissement d'énergie correspondant sera donc nécessairement pris au milieu ambiant, d'où absorption de chaleur et refroidissement.

L'inverse aura lieu par suite d'une condensation, et si celle-ci est permanente, ce qui a lieu lors du passage de l'état de vapeur à l'état liquide, la chaleur dégagée est alors désignée sous le nom de *chaleur de vaporisation*.

Si, au contraire, nous considérons l'état *supragazeux*, la détente aura pour effet d'accroître la distance de deux ions consécutifs, d'où accroissement de résistance, diminution de l'énergie du courant, qui serait même annihilée si la distance des ions était devenue suffisante, et restitution de cette énergie au milieu ambiant, d'où dégagement de chaleur. La détente du milieu *supragazeux* sera donc accompagnée d'un dégagement de chaleur, à l'inverse de ce qui se passe pour les gaz; donc deux éléments consécutifs de courant se repoussent.

Si le milieu gazeux est soumis à une pression excessive, d'environ 5,000 atmosphères par exemple, le même phénomène se reproduit, ainsi que l'a constaté Amagat. En effet, dans ces conditions, les spirales-molécules étant étroitement serrées les unes contre les autres, la pression n'a pas seulement pour résultat de rapprocher celles-ci les unes des autres, mais encore de rap-

procher davantage les ions, d'où absorption de chaleur par compression ou par diminution de volume (deux éléments consécutifs de courant se repoussent).

Variation de volume de la fibre-molécule par suite d'une variation de température. — A l'accroissement de température d'une masse gazeuse correspondent, dans la molécule spirale, deux phénomènes tendant à produire des effets inverses.

D'une part, à l'accroissement de température correspond un accroissement du mouvement gyratoire des ions, d'où : 1° accroissement de leur attraction réciproque électrostatique ; 2° accroissement de l'intensité du courant et, par conséquent, de l'attraction électro-magnétique de deux spires consécutives. Ces deux effets tendront à produire une contraction. D'autre part, il y aura accroissement des actions pulsantes, d'où tendance à la dilatation (cause de la répulsion de deux éléments consécutifs de courant).

Nous pouvons donc conclure que si les actions attractives électro-magnétiques et électro-statiques l'emportent sur les actions pulsantes, la molécule se contractera par suite d'un accroissement de température; le contraire aura lieu si l'action pulsante l'emporte.

Dans l'état liquide, les choses se passent comme si les éléments étaient en contact; par conséquent, les variations de volume de ces corps avec la température ne représentent autre chose que les variations de volume des éléments gyrostatiques eux-mêmes. Nous voyons, dès lors, la raison pour laquelle certains liquides se contractent par suite d'une élévation de température (l'eau entre 0 et 4°), alors que d'autres se dilatent.

Remarquons, à titre de confirmation de cette hypothèse, qu'un gyrostat non pulsant aurait une chaleur spécifique infinie, sa faculté de dissipation de l'énergie étant nulle. Dans ces conditions, tout accroissement d'énergie entraînerait une contraction. Or l'eau, comme on le sait, possède une chaleur spécifique exceptionnellement grande, et c'est la raison pour laquelle cet effet de contraction peut devenir apparent.

Des solutions. — Pour qu'un corps puisse entrer en solution, il faut que les spires gyrostatiques puissent non seulement s'adapter aux éléments superficiels de la substance solide, condition indispensable pour que celui-ci soit mouillé, mais il faut encore que le mélange et l'adaptation puissent se faire avec les fibres du solide en pleine matière. On conçoit immédiatement que ce seront les corps les plus voisins au point de vue chimique, c'est-à-dire ceux dont les fibres ont les formes les plus semblables, qui se dissoudront le plus aisément les uns dans les autres.

Le phénomène se produit du reste suivant un processus tout à fait comparable à celui de l'évaporation. Les spires mélangées au liquide se comportent comme le feraient les spires de vapeur mélangées à un gaz, ainsi que cela résulte de la théorie bien connue de van t'Hoff.

Il est facile de voir comment se développe la pression osmotique ou, en d'autres termes, quel est le mécanisme de la paroi semi-perméable.

Supposons une solution enfermée dans un vase semi-perméable P (fig. 36). Les fibres *f* de l'eau traversent la paroi avec facilité. Au contraire, les fibres *f'* de la substance dissoute se comportent comme les liquides non mouillants et ne traversent pas la paroi. Mais les chocs qu'elles déterminent par leurs mouvements latéraux déterminent une pression qui se traduit par le relèvement du liquide dans le tube *t*.

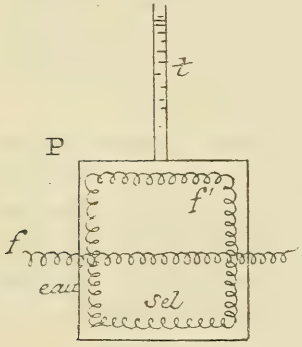


Fig. 36.

Si les fibres se mélangent simplement les unes aux autres, la solution sera simplement physique, et le corps, en sortant de la dissolution, sera le même qu'en y entrant; il y aura, de plus, toujours absorption de chaleur. S'il en est autrement, s'il y a formation d'hydrates ou dégagement de chaleur, il y a combinaison, c'est-à-dire que des liens ioniques s'établissent entre les spires du dissolvant et de la substance dissoute.

Électrolytes. — Lorsque la fibre du corps dissous s'introduit dans le dissolvant, deux cas peuvent se présenter; ou bien les fibres ou *brins* élémentaires qui constituent le *fil-molécule* peuvent rester étroitement unis comme par le passé; dans ces conditions, la solution n'est pas conductrice, mais il se peut que les *brins* se *relâchent* et que les atomes ne soient plus reliés entre eux que par de longues chaînes ioniques, chaînes qui maintenaient les éléments étroitement unis.

Nous voyons donc qu'il n'y a *pas de dissociation*, mais simplement relâchement des liens ioniques. Nous dirons alors que la solution est *iodynamisée* (fig. 37); elle devient alors conductrice de l'électricité, car il suffit de la moindre action électrique pour mettre en liberté les ions nécessaires au passage du courant, pour rompre les chaînes ioniques, *ioniser* le liquide ou tout au moins adapter l'extrémité des brins rompus aux ions polaires des électrodes et déterminer, par conséquent, la décomposition.

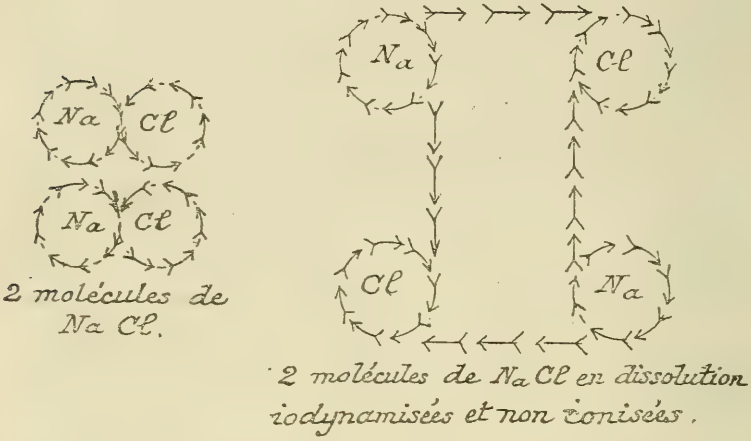
En réalité, il n'est pas nécessaire que les ions soient absolument désunis pour servir à la propagation du courant, il suffit que dans une chaîne ils puissent se déplacer les uns par rapport aux autres, d'où induction électrostatique, vibration, donc mise en liberté d'énergie sous la forme calorifique, tendance à la rupture de la chaîne.

En résumé, toute rupture de chaîne ou toute tendance à la rupture déterminera une dissipation, un dégagement d'énergie calorifique (chaleur dégagée par le courant), et l'inverse se produira pour toute reconstitution, ainsi que nous l'avons vu.

Il résulte comme conséquence de ceci que dans le phénomène de la réaction chimique, si les quantités de chaleur mises en jeu par la rupture des chaînes ioniques (*dissociation atomique*) l'emportent sur la quantité de chaleur correspondant à leur reconstitution, la combinaison sera *exothermique*. L'inverse aura lieu dans le cas contraire, la combinaison sera *endothermique*.

Les éléments *iodynamisés* exercent des chocs et une pression osmotique égale ou à peu près égale à celle que l'on observerait s'ils étaient complètement libres, d'où il résulte que les choses

se passent comme si le nombre des molécules s'était accru par suite de la dissolution, ce qui se traduit par l'accroissement correspondant de la pression osmotique.



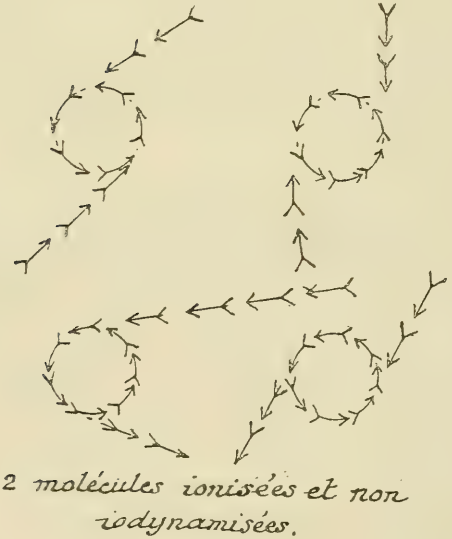


Fig. 37.

On peut concevoir que des fibres du dissolvant puissent être réunies aux fibres dissoutes par des chaînes ioniques, de même que dans le cas précédent, et que, lors de la solidification, elles fassent partie de la masse cristallisée, de manière à constituer des *hydrates*.

Dans la théorie qui a précédé la nôtre, on admettait que les *ions électrolytiques* possédant des charges de signes contraires cheminaient dans le liquide et allaient neutraliser les électrodes de noms contraires. Ces vitesses de cheminement de l'ancienne théorie représentent dans la nôtre, les vitesses relatives avec lesquelles les ions électrolytiques de natures différentes sont susceptibles de se souder, toutes choses étant égales. Cette vitesse sera proportionnelle à l'intensité du courant, qui se propage par le même mécanisme ionique, qu'il s'agisse de l'électrolyse, de la conductibilité métallique, de la neutralisation par radioactivité, etc.

Mais quelle est la source des ions qui prennent part au courant?

Dans le cas des électrodes inaltérables, telles que les électrodes de platine, il est tout naturel d'admettre qu'elle est fournie exclusivement par les chaînes ioniques résultant de chaînes iodynamisées rompues et adaptées.

La résistance sera donc d'autant plus faible que cette source est plus abondante, que la solution est plus concentrée. Si ces chaînes ne peuvent pas se rompre, le liquide n'est plus conducteur d'une part, et, d'autre part, l'absence de points de soudure, de chaînes ouvertes, ne permet plus la combinaison ou le dépôt électrolytique.

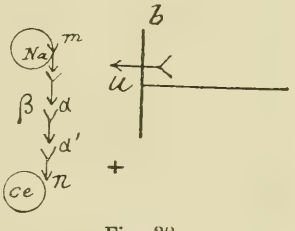


Fig. 38.

Considérons d'abord le cas le plus simple (fig. 38), celui d'une molécule de NaCl iodynamisée, en dissolution, placée entre deux électrodes inaltérables *a*, *b*, et supposons que la chaîne *mn* vienne à se trouver dans le voisinage de l'ion polaire *u* orienté positivement, il se pourra qu'un ion α étant moins sollicité par β que par *u* se détache, devienne libre et, dès lors, commence à fonctionner entre *a* et *b*, ainsi que nous l'avons vu plus haut, de

manière à établir le courant (voir fig. 13). Cependant α' pourra se resouder à β, et, dès lors, la chaîne ne sera pas définitivement compromise, la molécule NaCl ne sera pas dissociée.

Tel sera le mécanisme du passage du courant dans un électrolyte lorsque les forces électromotrices polaires sont faibles.

Mais à partir d'une certaine grandeur de la force électromotrice, celle-ci pourra devenir suffisante pour amener la rupture complète de la chaîne, la dissociation; à ce moment, *les brins* de l'atome-chlore se fixeront en *b*, les brins de l'atome-sodium se fixeront en *a*.

Nous avons, en résumé, trois choses à considérer :

1° Les ions électrolytiques NaCl ou atomes laissent échapper des ions élémentaires (d'où rupture de chaînes ioniques, si la force électromotrice des électrodes est suffisante, et séparation des ions électrolytiques); ces ions déterminent le courant AB d'une façon normale par induction électrostatique, de même que dans un métal ou dans un tube à vide, par le mécanisme indiqué plus haut;

2° L'ion élémentaire étant une machine aspirante et foulante, son orientation donne naissance à un courant d'éther de l'électrode positive vers l'électrode négative;

3° A l'électrode positive *b*, la neutralisation est plus facile par induction électrostatique qu'à l'électrode *a*. L'équilibre dynamique du courant exige donc la mise en jeu d'un nombre d'ions plus grand en *a* qu'en *b*.

Nous avons désigné ce phénomène sous le nom d'*asymétrie des pôles*. Nous avons démontré précédemment son existence, notamment à l'aide de l'expérience qui consiste à électriser un plateau de résine positivement ou négativement; s'il est électrisé négativement, on neutralise aisément cette électricité par friction à l'aide d'un conducteur positif. Si l'inverse a lieu, la neutralisation est difficile, elle est accompagnée d'un crépitement particulier, accompagné de projections cathodiques qui rejettent au loin l'électricité positive (1).

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité*, p. 83.

L'asymétrie des électrodes a pour conséquence le dépôt électrolytique; sans cette condition, *il n'y aurait pas de fixation.* Il existe nécessairement le même nombre d'ions polaires à la cathode et à l'anode. Cela étant, par suite de l'asymétrie, un seul ion *i* déterminera par exemple à l'anode la même neutralisation que deux ions *i* à la cathode. Un ion μ de l'anode sera dès lors libre et il se soudra un ion électrolytique négatif *v*, rendu libre par suite d'une rupture de chaîne; l'ion électrolytique positif, libéré par le même fait, tendra à se rendre à la cathode *a*.

Deux cas pourront se présenter :

1° Il se peut que par suite du plus petit nombre d'ions polaires libres à la cathode, tous les ions électrolytiques ne parviennent pas à se souder; dans ces conditions, l'électrolyse sera *anormale;*

2° Si tous les ions électrolytiques se soudent, l'électrolyse sera normale.

On voit que les soudures des ions électrolytiques tendent à renverser le courant, à polariser les électrodes.

Le transport des *ions électrolytiques,* loin d'être l'origine du courant, collabore uniquement à sa destruction.

En résumé, la plus grande proportion d'ions polaires libres à l'anode fait que c'est dans son voisinage que s'élabore la plus grande destruction de chaînes ioniques, d'où mise en liberté de plus de chaleur qu'à la cathode. Au contraire, la pénurie d'ions polaires libres à la cathode détermine, dans cette région, à la fois une pléthore d'ions électrolytiques et d'ions élémentaires, les premiers déterminent une alcalinité anormale de cette région; les seconds, en excès, cessent de faire partie du courant en déterminant des projections cathodiques, que l'on distingue sous le nom de rayons cathodiques si l'on fait usage d'un gaz ionisé au lieu d'utiliser un électrolyte, ce qui revient en réalité au même.

Nous avons réussi à mettre ces projections cathodiques en évidence dans le cas de l'électrolyse, à l'aide d'une solution électrolytique quelconque, disposée dans un cristallisoir et dans lequel on fait passer le courant de quelques éléments de Daniel. L'électrode positive est en plomb, l'électrode négative est en or ou en platine.

On remarque alors, après quelques jours, que le souffle cathodique a produit à la surface de l'oxyde de plomb, déposé au fond du vase, les rides r, r', r'' qui figurent parfaitement les stries des tubes à vide (fig. 39).

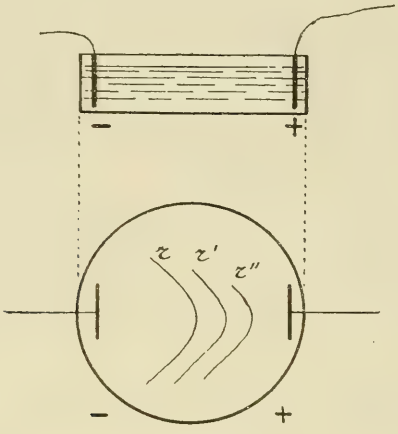


Fig. 39.

Nous avons vu précédemment qu'à l'aide de solutions de gélatine, on pouvait mettre en évidence les émissions anodiques résultant du départ vers la cathode des *ions électrolytiques* (1) et qui provoquent également un véritable souffle *atomique* et non *ionique*.

Lorsque l'on plonge dans de l'argile humectée deux plaques d'aluminium servant d'électrodes d'un courant fourni par deux éléments de Daniel, on remarque après quelque temps que l'argile tend à être repoussée par la cathode et qu'elle adhère, au contraire, à l'anode. On retire alors sans difficulté la plaque cathodique. Mais si l'on examine les deux plaques, on remarque que cette dernière est revêtue d'un enduit très adhérent, et la plaque anodique ne présente pas ce caractère. La répulsion cathodique serait donc toujours le résultat de l'émission ionique, alors qu'en même temps elle serait le siège d'une forte condensation atomique.

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité*, p. 99.

Électrodes attaquables. — Dans ce qui précède, nous avons admis que les ions des électrodes ne prenaient point part au phénomène de l'électrolyse.

Si l'on utilise une cathode en or ou en platine, on remarque que l'anode se désagrège lorsqu'elle est fournie par la plupart des métaux; l'électrolyte étant, par exemple, une solution saline, il peut se produire alors des phénomènes chimiques bien connus, et notamment production d'oxydes qui se déposent au fond du vase; il en est, par exemple, ainsi du fer, du nickel, du plomb, de l'étain, du cuivre, du zinc, de l'aluminium, etc.

Si, au contraire, nous utilisons une anode inaltérable en or ou en platine, et si nous faisons varier le métal de la cathode, nous remarquons, en général, que celle-ci n'est pas altérée.

Cependant, il importe de remarquer que si les ions élémentaires du métal prennent part à la réalisation du courant, ceux-ci, en s'échappant, pourront déterminer l'arrachement d'ions électrolytiques en quantité appréciable. Le seul métal pour lequel nous avons constaté ce phénomène est l'aluminium; il s'enlève à peu près la même quantité d'aluminium à la cathode et à l'anode. On remarque, de plus, que l'arrachement s'est produit à la cathode avec une extrême violence, de manière à mettre à nu les fibres du laminage.

Le charbon de pile placé à la cathode détermine la production d'un liquide brun dont les propriétés sont particulièrement intéressantes.

Pour obtenir ce liquide, on fait usage de deux charbons de pile que l'on place à faible distance dans de l'eau distillée, que l'on fait traverser par un courant déterminé par une centaine de volts.

En résumé, nous pouvons considérer trois variétés de courants, qui se classent comme suit dans l'ordre de leur complexité :

1° Le *courant athermique* ou *courant aimant* ou simple courant d'éther gyrostatique déterminé par la rotation des ions;

2° Le *courant thermique*, développant de la chaleur par suite des déplacements relatifs des ions, de l'induction électrostatique et des vibrations qui en sont la conséquence;

3° Le courant électrolytique, où nous avons à la fois à considérer le courant d'éther, le mouvement ionique et le mouvement des ions électrolytiques qui tendent à renverser le courant.

Nous retrouvons dans les gaz raréfiés un phénomène entièrement comparable à celui de l'électrolyse. Les éléments du gaz raréfié sont *iodynamisés* par suite de la faible pression qu'ils supportent, et, dès lors, s'*ionisent* facilement sous l'action du courant, de manière à établir dans tous les cas le système dynamique de l'électrolyse sous l'action des électrodes.

Cela étant, si l'on considère un tube produisant des stries, l'espace qui est le siège des vibrations résultant de la rencontre des ions correspond au développement de chaleur et de lumière que l'on observe en ces points. Les espaces intermédiaires correspondent aux espaces sombres.

Les bandes sombres, qui ne comportent que le mouvement gyratoire et qui se caractérisent donc par cette absence de lumière, correspondent aux espaces de libre parcours des ions. Ces espaces seront d'autant plus grands que le degré de raréfaction sera plus avancé.

Nous avons vu comment il se faisait que la cathode était le siège d'une émission anormale intense, les ions projetés dans une direction opposée à celle du courant refoulent les stries vers l'anode. Aussi, l'espace sombre qui enveloppe la cathode se développe-t-il d'une manière toute spéciale. Elle est également le siège de l'arrachement ionique dont nous avons parlé. Nous voyons aussi la raison pour laquelle la polarité anodique se rencontre parfois dans l'émanation cathodique ; elle est le résultat du renversement de l'ion par induction électrostatique.

L'ÉTAT PARTICULAIRE ; expression que nous employons de préférence à *état colloïdal* ou *milieu trouble*, par cela qu'il se produit non seulement dans les liquides, mais encore dans les gaz.

Nous allons voir qu'une particule très petite de matière doit nécessairement présenter des propriétés toutes spéciales.

Reprenons, en effet, l'image de la goutte d'eau de toute part enserrée dans son réseau tendu de fibres gyrostatiques (fig. 32),

lequel lui communique la forme sphérique, et supposons que l'on vienne à réduire progressivement le volume de cette goutte soit par évaporation, soit par un procédé quelconque ; il arrivera un moment où le diamètre de la fibre gyrostatique, qui constitue le réseau superficiel, deviendra comparable au diamètre de la sphère elle-même. A partir de ce moment, l'équilibre dynamique de cette fibre gyrostatique commencera à être compromis par suite de la nécessité où se trouvent les fibres ioniques de se rapprocher d'une manière anormale en *a*, *b* (fig. 40). Alors des ions seront libérés, orientés positivement ou négativement; en un mot, la particule sera électrisée positivement ou négativement. Des particules semblables se repousseront réciproquement et nous verrons apparaître le *mouvement brownien*, auquel Spring attribue justement la persistance des milieux troubles.

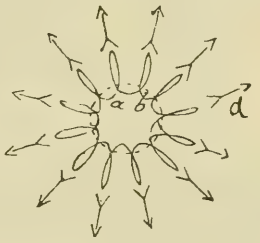


Fig. 40.

Si le milieu dans lequel nagent les particules n'est pas conducteur, les ions dont nous venons de parler resteront localisés dans le voisinage de la particule, mais il suffit d'y introduire un électrolyte pour voir disparaître le phénomène. Les ions α ne tardent pas à faire partie des chaînes ioniques ; à mesure qu'ils se produisent, l'élément est déchargé et tombe au fond du vase. L'action condensante sera nécessairement renforcée si l'on ajoute à ces chaînes ioniques celles qui sont développées par le courant. La particule se rendra alors à la cathode ou à l'anode, suivant qu'elle est positive ou négative.

Si l'on mélange des *particules* négatives et positives *et si les charges négatives sont égales aux charges positives*, il y aura neutralisation réciproque et dépôt. MM. Picton et Linder ont reconnu qu'il en était ainsi. M. Spring a constaté le fait pour le *bleu d'aniline* et le *rouge Magdala;* il ne l'a pas observé dans d'autres cas, mais, évidemment, par suite de la non-équivalence des charges de signes contraires.

On peut enfin déterminer le dépôt du milieu trouble en

ionisant le liquide à l'aide d'une machine électro-statique, mais le temps nécessaire au dépôt est beaucoup plus long. Afin de réaliser l'expérience, nous avons introduit, dans trois petits vases de Berlin A, B, C (fig. 41), un milieu trouble obtenu en faisant

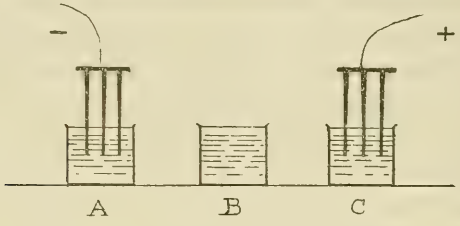


Fig. 41.

jaillir l'étincelle dans l'eau distillée, entre deux fragments d'étain. Dans les vases A et C plongeaient trois pointes de cuivre figurées en A; il y avait communication de ces pointes avec le pôle négatif d'une machine de Holtz, activée par une petite dynamo; les pointes C étaient reliées au pôle positif et le liquide trouble B servait de témoin. On remarque qu'après six heures de marche le dépôt est effectué au pôle négatif, et qu'après neuf heures il s'est produit au pôle positif. Pendant ce temps, il ne s'est pas produit de dépôt appréciable dans le vase B. Il est assez curieux de remarquer que les côtés des parois des vases A et C tournés vers la machine avaient condensé du dépôt. Il résulte de nos recherches précédentes, que la faculté ionisante est plus intense à la cathode qu'à l'anode (1); nous voyons encore ici la confirmation de ce fait.

Ainsi que nous le verrons dans un travail que nous avons entrepris avec un botaniste, M. Micheels, en étudiant la germination de graines (particulièrement du Froment) placées sur un tamis affleurant avec la surface d'un liquide, les racines des plantes se comportent absolument comme les pointes positives, et c'est l'action particulaire, qui est l'origine de l'*excitation*, qui détermine le phénomène de l'assimilation dans les végétaux. Le même phénomène se produit pour les feuilles qui se comportent

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité*, p. 86.

comme des pointes électrisées négativement; les particules sont ici les gouttelettes d'eau en suspension.

C'est l'action d'une solution particulaire négative d'étain qui est la plus efficace sur la racine, lesquelles atteignent dans ce liquide des longueurs invraisemblables (Froment, Pois). D'autres solutions colloïdales négatives produisent des effets moindres ; ce qui démontre qu'il intervient une adaptation correspondant aux dimensions de l'ion.

Fig. 42.

La plante se comporte comme si elle était bipôle, de telle manière que l'action inverse se produit sur la tige et sur les feuilles. En maintenant la solution par capillarité à l'aide d'un tissu de tulle *t* (fig. 42) dans un verre de lampe, les germes étant maintenus par un tissu semblable *t'*; les tiges plongent dans le liquide, et l'on remarque que ce sont les liquides qui sont le plus favorables aux racines qui sont le plus défavorables aux tiges, et réciproquement. Les feuilles se comportent comme possédant la polarité négative. Et l'on voit que c'est la rosée particulaire positive qui, dans la nature, joue le rôle efficace.

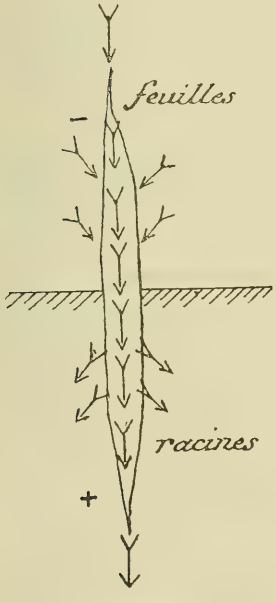


Fig. 43.

On peut renforcer cette polarité des plantes en les soumettant au passage d'un courant dans le sens de leur longueur; dans ces conditions, si l'on communique aux racines la polarité positive lorsque celles-ci sont plongées dans une solution nutritive, il y a renforcement; dans le cas inverse, les racines disparaissent. Le contraire se vérifie pour la tige.

Au point de vue du fonctionnement ionique, la plante sera donc représentée par la figure 43.

Il est facile de voir combien est complexe l'action du courant sur la végétation lorsque celui-ci se transmet simplement dans le milieu de culture. Il est, en effet, à la fois le producteur et le destructeur de l'état particulaire, il déterminera donc une action favorable ou défavorable, suivant que l'un de ces effets est prédominant.

Nous renverrons le lecteur qui s'intéresse à ces recherches au long travail que nous avons exécuté en collaboration avec M. Micheels.

On voit également pourquoi la rosée se condense d'une manière si abondante sur les végétaux, les feuilles se comportant à peu près comme des aigrettes négatives. Nous avons même remarqué au laboratoire que, lorsque la vie se manifestait d'une manière particulièrement intense dans une expérience de germination, des gouttes de rosée se déposaient sur ces feuilles et non sur d'autres, placées cependant dans les mêmes conditions, mais moins vivantes.

On voit pourquoi la plante est soumise à une torsion, le mouvement gyrostatique des ions étant l'origine de sa croissance.

Toute gouttelette d'eau atteignant des dimensions suffisamment petites s'électrise nécessairement.

Si le diamètre de la gouttelette s'accroît en condensant de la vapeur, les ions reprennent leur état d'équilibre normal, et toute manifestation électrique disparaît.

Le phénomène électrique de l'atmosphère apparaîtra d'une manière particulièrement intense lorsque les gouttelettes auront atteint une dimension comparable à la longueur d'onde lumineuse; l'atmosphère sera alors limpide, de même que les milieux troubles filtrés, qui agissent d'une manière très active malgré cette limpidité (état colloïdal). Mais il serait particulièrement intéressant d'observer si ces particules liquides, assez petites pour ne pas gêner sensiblement la propagation des ondes lumineuses, n'entravent pas la propagation des ondes ultra-violettes. Le Dr Gustave le Bon a remarqué que, par des ciels purs en apparence, la lumière ultra-violette faisait défaut, et qu'il pouvait en être autrement par des ciels couverts de nuages. La lumière

ultra-violette ferait donc plus particulièrement défaut lorsque l'électricité atmosphérique est le plus abondante.

Ces particules exercent des actions d'influence sur les corps plongés dans l'atmosphère. Mais si un tourbillon vient à se produire dans une atmosphère chargée de ces particules, les ions ne tardent pas à s'orienter suivant une direction déterminée, et, dès lors, les surfaces correspondant aux spires du mouvement tournant acquièrent une polarité d'ensemble correspondant à la charge orageuse. La polarité ainsi développée peut se comparer, à certains points de vue, à l'orientation développée par des frictions *dans un sens déterminé*, à la surface d'un bâton de résine (expérience de Volpicelli).

Si la tempête due à un mouvement tournant de l'atmosphère est capable de développer les phénomènes électriques d'ensemble qui correspondent à l'orage, nous allons voir que la *tempête magnétique*, c'est-à-dire le mouvement gyratoire déterminé par l'aimant, fournit une interprétation aussi facile des aurores polaires.

Remarquons, en effet, que, d'après ce qui a été dit plus haut, par suite de son état de raréfaction, l'air est tout au moins iodynamisé et même ionisé (voir fig. 37) dans les hautes régions de l'atmosphère. Or, chaque fibre ionique libre se comporte vis-à-vis de l'aimant terrestre comme le ferait un rayon cathodique ou anodique. Ces manifestations étant identiques, cet aimant amènera dès lors une orientation d'ensemble tout à fait comparable à celle produite par le tourbillon aérien dans le phénomène orageux et identique au mouvement hélicoïdal déterminé par l'aimant dans le tube de Crookes.

La gyration s'exécutera dans le sens du courant, et l'espace calme correspondant à l'*œil de la tempête* coïncidera avec les pôles. On sait, en effet, que les phénomènes auroraux deviennent de plus en plus rares, à partir d'une certaine latitude, à mesure qu'on se rapproche davantage du pôle.

Dans ces conditions, la radiation solaire interviendrait comme agent ionisant. Cette ionisation s'étant produite dans les régions tempérées et même tropicales, l'air qui y a été soumis est amené par les courants atmosphériques dans les régions plus voisines

du pôle, où, soumis à la tempête magnétique, il ne tarde pas à manifester les phénomènes électriques connus.

Si le soleil émet en grande proportion des rayons à petite longueur d'onde, circonstance qui paraît se manifester spécialement pendant la période des taches, l'ionisation se produit d'une manière particulièrement marquée, d'où il résulte que l'aimant terrestre peut déjà manifester son action dans des régions trop éloignées des pôles pendant la période minima des taches.

Le phénomène d'orientation et de décharge particulaire commencera donc déjà à se produire dans les régions tempérées, de manière que ce phénomène se trouve à peu près complètement réalisé avant que les masses d'air entraînées par les courants aient atteint le pôle.

Nous voyons donc la raison pour laquelle le maximum des aurores polaires des régions tempérées coïncide avec le minimum de ces manifestations dans les régions polaires et avec le maximum des taches solaires.

On remarquera également que s'il se produit une émission particulièrement intense de radiations ultra-violettes à un moment donné, elle se manifestera d'une manière à peu près semblable aux deux pôles. Des phénomènes d'induction, ainsi que nous l'avons dit plus haut, s'ajouteront à cette action.

Au lieu d'admettre l'hypothèse que nous avons formulée plus haut et d'après laquelle la persistance de *nœuds* au-dessus du point critique serait la cause de la variabilité de la densité dans les mêmes conditions de température et de pression, il est plus vraisemblable de supposer qu'une partie de la substance à l'état liquide se trouve dans un état particulaire extrêmement raffiné, n'empêchant pas ces substances de laisser passer librement toutes les radiations lumineuses et, par conséquent, d'être *optiquement vides* lorsqu'ils sont purs, ainsi que cela résulte des belles expériences de Spring, en particulier sur l'eau.

A la température critique, les *particules* liquides non évaporées se maintiendront au fond du tube, et ce n'est qu'à une température beaucoup plus élevée que l'évaporation sera complète.

Nous avons muni un tube renfermant de l'éther, de deux électrodes en platine, entre lesquelles pouvait jaillir l'étincelle d'une bobine. A la température critique, la résistance est trop forte pour permettre la production de celle-ci, mais les électrodes jouent le rôle des pointes dont nous avons parlé plus haut. Le tube était rempli environ au tiers et le ménisque disparaissait un peu en dessous des pointes. Il présentait avant la disparition l'apparence d'un trait noir. Si, peu d'instants après la disparition, on met la bobine en activité, on remarque que le trait noir réapparaît pendant quelques instants, ainsi que le mouvement particulier qui précède la condensation.

Nous voyons donc qu'en réalité à la température critique la densité du liquide deviendrait égale à la densité de la vapeur. Mais une partie de la substance maintenue à l'état particulaire demeurerait momentanément au fond du tube; il s'établirait ensuite une solution colloïdale par diffusion. Les mouvements que l'on observe dans la substance lorsque le mélange s'établit correspondent du reste bien au mouvement brownien.

Ceci nous donne encore l'explication d'un fait qui nous a beaucoup étonné. Si l'on fait passer sur la surface de l'eau un courant d'air complètement saturé de vapeur, celui-ci évapore encore du liquide en proportion très sensible, tout transport mécanique étant, du reste, rendu impossible à l'aide de filtres en coton (1).

L'expérience démontre encore la faible volatilité de l'eau lorsqu'elle se trouve à l'état de particules extrêmement ténues. C'est ainsi que la *brume*, formée de petites gouttelettes d'eau, se produit dans une atmosphère non saturée de vapeur. On pourrait, à vrai dire, interpréter ce phénomène par l'existence de particules de poussière en suspension présentant des surfaces concaves et devenant des centres de condensation, mais alors la persistance de la goutte sphérique formée devient inexplicable.

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, 1891, t. XXI, p. 11.

CHAPITRE IV

L'état solide.

Considérations générales. — Rapport entre la conductibilité électrique et la conductibilité calorifique. — Influence de la pression sur la conductibilité calorifique. — Rapport entre les conductibilités calorifique ou électrique et le coefficient de dilatation. — Dureté et fragilité. — Magnétisme. — L'analogie et la différence qui existe entre un corps magnétique soumis à l'action de l'aimant et un conducteur soumis à l'influence. — Courants thermo-électriques. — Phénomène de Hall. — Phosphorescence, genèse et destruction de l'atome.

Le corps solide, de même que le corps liquide ou gazeux, est constitué par les mêmes fibres gyrostatiques élémentaires. Dans les premiers de ces corps, ces fibres ondulent et se déplacent les unes par rapport aux autres; dans l'état solide, au contraire, leurs orientations sont fixes. Ce sont même ces orientations qui caractérisent les diverses formes cristallines que nous observons.

Il importe donc de ne pas confondre des liquides excessivement visqueux, tels que l'asphalte, par exemple, avec l'état solide proprement dit, ainsi que l'a fait remarquer Tamann.

Lors du passage de l'état liquide à l'état solide, nous observerons la mise en jeu de quantités de chaleur comparables à celles qui se dégagent dans le passage de l'état de vapeur à l'état liquide (chaleur de fusion).

Mais, ainsi que nous l'avons fait observer à propos de la contraction de l'eau par la chaleur, nous pouvons considérer des éléments gyrostatiques de deux espèces : ceux qui se dilatent par suite d'une addition d'énergie calorifique et ceux qui se contractent. L'eau est, dans ce dernier cas, au-dessous de 4°; il en résulte que si on lui enlève la quantité de chaleur nécessaire au maintien de l'état liquide, le solide obtenu, la glace, possède un volume plus grand. Lorsque cette transformation est réalisée,

la chaleur spécifique est considérablement diminuée; aussi la glace se dilate-t-elle par la chaleur.

Une vérification fondamentale de notre théorie se trouve dans ce fait découvert par Wiedemann et Frants, qu'il y a proportionnalité entre la conductibilité calorifique et la conductibilité électrique. Il est facile de voir qu'il doit en être ainsi; en effet, considérons un circuit inducteur AB (fig. 44) parcouru par un courant d'intensité c et dont la fréquence est f; l'intensité moyenne I_i du courant induit dans le circuit ab qui se trouve à une distance d sera

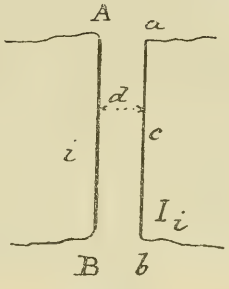


Fig. 44.

$$I_i = \frac{fi}{d} c,$$

c représentant le coefficient de conductibilité du circuit induit.

Si, toutes choses étant égales, nous remplaçons le circuit induit ab par un autre circuit de conductibilité c', nous aurons

$$I'_i = \frac{fi}{d} c',$$

d'où

$$\frac{I_i}{I'_i} = \frac{c}{c'}.$$

Les intensités des courants induits seront proportionnelles aux coefficients de conductibilité.

Si nous représentons par T et par T' les énergies induites et par E la force électromotrice développée dans l'induit, nous aurons finalement

$$\frac{T}{T'} = \frac{EI_i}{EI'_i} = \frac{c}{c'},$$

c'est-à-dire que les énergies induites sont proportionnelles aux coefficients de conductibilité électrique.

Supposons que nous substituions maintenant à la considération de notre circuit inducteur AB, la considération d'une

tranche isothermique parcourue par des courants en tous sens et dont la température est régie par la loi de Joule, et remarquons encore que pour une même température la fréquence des oscillations est la même.

Nous pouvons admettre, pour fixer les idées, que AB représente la surface de séparation d'un fluide et d'une lame solide, *induisant de la chaleur* dans des tranches *ab* de substances solides de natures différentes et de conductibilités électriques c et c'.

Dans ces conditions, les quantités de chaleur induites Q et Q′ seront, pour les raisons que nous avons indiquées plus haut, représentées par le même rapport, et nous aurons

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{EI_i}{EI'_i} = \frac{c}{c'},$$

c'est-à-dire que la conductibilité calorifique et la conductibilité électrique représentent une seule et même chose.

Nous avons supposé, dans le cas que nous venons d'examiner, que la tranche inductrice de séparation des deux milieux était la même; supposons-la quelconque.

Nous aurons encore

$$I_e = ic \quad \text{ou} \quad I_e^2 = i^2c^2$$
$$rI_e^2 = ri^2c^2$$
$$rI_e^2 = i^2c,$$

expression dans laquelle r représente la résistance de la couche induite et rI_e l'énergie induite.

Si nous représentons par R la résistance de la couche de séparation inductrice dont la température t est définie par la relation

$$t = Ri^2,$$

nous aurons

$$i^2 = \frac{t}{R},$$

d'où

$$rI_e^2 = c\frac{t}{R}.$$

Si nous remarquons que R représente la résistance superficielle dont le rapport inverse représente la conductibilité superficielle c, nous écrirons finalement

$$rI_c^2 = cc_s t.$$

L'énergie ou la quantité de chaleur induite sera donc proportionnelle au coefficient de conductibilité superficielle, proportionnelle au coefficient de conductibilité de la substance considérée et proportionnelle à la température.

Si nous considérons un mur dont les deux faces sont à des températures différentes, la propagation des chaleurs induites se fera en sens inverses et nous aurons

$$rI_c^2 - rI_c'^2 = cc_s(t - t'),$$

c'est-à-dire que la quantité de chaleur qui passera sera proportionnelle à la différence de température des deux faces.

Voici le tableau construit à l'aide des tables de Landolt qui indique dans quelle mesure la conductibilité électrique est proportionnelle à la conductibilité calorifique :

Conductibilité électrique.		Conductibilité calorifique.	Conductibilité électrique.		Conductibilité calorifique.
Ag	100	100	Sn	14	15
Cu	82	89	Fe	15	14
Al	50	31	Pb	7.6	6.6
Mg	51	54	Sb	3.4	3.8
Zn	25	27	Hg	2.5	1.30
Cel	22	20	Bi	1.2	1.6

Il résulte de ce que nous avons dit précédemment, que la chaleur peut se communiquer d'un élément à l'autre par deux procédés différents :

1° Par l'induction développée par les chaînes iodynamiques des corps conducteurs;

2° Par l'induction développée par la chaine ionique axiale de la fibre atomique.

Remarquons que si le premier procédé était seul en jeu, un corps non conducteur de l'électricité ne conduirait pas la chaleur, alors qu'en réalité on constate toujours une légère conductibilité calorifique. De plus, pour les corps mauvais conducteurs de l'électricité, il n'existe plus de rapport simple entre la conductibilité électrique et la conductibilité calorifique.

Cette théorie permet également de nous rendre compte d'un fait d'apparence absolument paradoxale, observé par de Sénarmont.

Si l'on soumet un corps isotrope à l'action d'une pression s'exerçant dans une direction déterminée, on remarque que la conductibilité calorifique est plus faible suivant le sens de la pression. Ce fait peut se traduire en disant qu'un point matériel communique d'autant plus difficilement sa chaleur à un point voisin, qu'il en est plus rapproché.

En réalité, il est facile de voir qu'il doit en être ainsi, car si nous considérons une chaine ionique *ab* (fig. 45), orientée dans le sens de la pression, celle-ci aura pour effet de rapprocher les ions et, dès lors, de diminuer la résistance électrique et d'accroître l'intensité du courant; dès lors, l'induction électro-magnétique se faisant normalement à cette direction, la conductibilité sera accrue dans le sens $a'b'$.

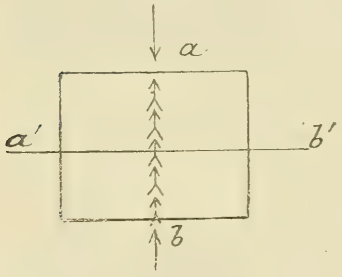


Fig. 45.

Nous pouvons justifier une relation intéressante que nous avons établie entre le coefficient de dilatation et le coefficient de conductibilité calorifique. Cette relation peut s'exprimer en disant que *pour les métaux appartenant à un même groupe naturel, le coefficient de dilatation est proportionnel à la racine cubique du coefficient de conductibilité calorifique ou électrique.*

Remarquons d'abord que, ainsi que nous l'avons dit, Ri^2 est constant pour une température donnée et pour les différents corps.

D'autre part, la répulsion de deux éléments consécutifs de courant, déterminée par les pulsations synchrones, est proportionnelle à l'intensité du courant, et si, comme nous l'avons vu, la dilatabilité de l'élément est déterminée par cette action répulsive, nous écrirons

$$i = \varphi(\alpha),$$

α représentant le coefficient de dilatation, et nous admettrons

$$\varphi(\alpha) = \alpha^x \quad \text{ou} \quad i = \alpha^x.$$

Nous aurons

$$Ri^2 = R\alpha^{2x} = A,$$

ou

$$\alpha = A \sqrt[2x]{c}.$$

Si l'on admet $x = \frac{3}{2}$, nous trouvons la relation trouvée empiriquement :

$$\alpha = A \sqrt[3]{c}.$$

Dureté et fragilité. — On conçoit aisément que si les éléments matériels sont réunis par des chaînes ioniques, ils seront moins sujets à se séparer les uns des autres.

La ductilité des métaux se trouverait donc ainsi liée à leur conductibilité. Afin de vérifier cette hypothèse, il suffit de se demander si un même métal devenu cassant et ayant dès lors perdu une partie de ses chaînes ioniques, voit également diminuer sa conductibilité.

Cette hypothèse est parfaitement vérifiée pour l'acier, dont la conductibilité diminue considérablement à mesure qu'il est plus trempé, plus cassant, plus dur.

La propagation de la chaleur dans un milieu matériel se fait donc par un mécanisme identique à la propagation au travers d'espaces éthérés mesurables, par induction électro-magnétique.

Pour les solides, ce procédé est le seul qui doive être envisagé, du moins pratiquement, la diffusibilité étant très faible.

Au contraire, dans les liquides, le mélange des éléments à

haute température, des gyrostats à gyration rapide, aux éléments à basse température, se faisant par diffusion, une partie de la chaleur se transmet par ce processus. Celui-ci est pratiquement le seul que l'on doive considérer dans l'état gazeux.

Dans les solides, la faible diffusion qui a été observée par Spring n'est pas le résultat de la migration des atomes, mais la conséquence de l'état iodynamique de la substance ou de la migration des ions, qui renouvellent constamment la substance de ces atomes, de même que l'assimilation et la désassimilation se produit constamment dans l'être vivant. Les atomes constituant les conducteurs sont donc comparables à l'être doué de vie. L'état de léthargie correspondrait au corps non conducteur, au corps *aniodynamique*.

S'il en est ainsi, la diffusion ne se manifestera pas dans ces derniers corps, ce qui se constate si l'on soude, par exemple, bout à bout des tiges de verre diversement colorées.

Magnétisme. — Une des conséquences immédiates que nous avons tirées de notre conception de la matière est celle du magnétisme.

Considérons, en effet, notre gyrostat atome A (fig. 46), dont

Fig. 46.

l'éther axial tourbillonne dans le sens de la flèche. Cela étant, concevons un deuxième gyrostat de même sens disposé au-dessus du premier. On sait que dans ces conditions les deux gyrostats s'attirent, ainsi que le feraient deux tourniquets tels que ceux qui ont été mis en jeu dans l'expérience de Weyher. Nous avons vu également que la considération de l'emboîtement de deux courants de sens contraires permettait de concevoir des substances s'orientant par attraction et des substances s'orientant

par répulsion, c'est-à-dire les substances *magnétiques* et *diamagnétiques*.

Si donc nous concevons une substance dont les fibres que nous venons de considérer sont toutes orientées suivant une même direction, ces fibres orientées seront susceptibles d'attirer ou de repousser les fibres d'une autre substance tout en déterminant la même orientation. S'il en est ainsi, la substance *attirante* ou *repoussante* s'appelle aimant. Si l'orientation déterminée par l'aimant dans la substance magnétique persiste lorsque l'aimant a cessé d'agir, la substance possède la faculté que l'on désigne sous le nom de force *coërcitive* (l'acier).

Nous avons également vu que le phénomène de Zeeman montre l'existence d'une chaîne ionique axiale *ab* (fig. 21).

C'est elle qui est mise en jeu dans la pyro-électricité des cristaux, qui sont diélectriques (voir p. 39). Cette fibre, en réalité reliée aux autres, participe à toutes les variations d'énergie de gyration qui caractérisent la quantité de chaleur ou d'énergie renfermée dans l'élément atome.

Cela étant, si nous concevons un cristal comme étant formé par des fibres atomiques orientées, l'une des extrémités axiales correspondra à la polarité positive, l'autre à la polarité négative.

Cette polarité s'accentuera avec la température, c'est-à-dire avec l'accroissement de l'énergie gyrostatique.

Si, la température étant parvenue à une certaine limite, nous neutralisons la fibre par induction électro-statique en approchant un conducteur par exemple, nous lui enlevons l'énergie d'orientation qui lui avait été communiquée par un accroissement de température, et la fibre, au lieu d'être ramenée par refroidissement à son point de départ, subira l'orientation inverse.

C'est bien la fibre axiale qui entre en jeu dans les diélectriques, ainsi que nous l'avons vu précédemment; car il serait impossible de concevoir autrement des polarités inverses aux deux extrémités d'un axe cristallographique.

Remarquons la différence fondamentale qui existe entre le magnétisme et l'électricité si l'on se place au point de vue de l'orientation des éléments.

Si nous approchons un barreau de fer *b* (fig. 47) d'un aimant A, par exemple, nous développerons les polarités indi-

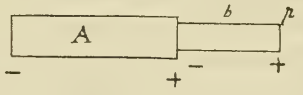


Fig. 47.

quées, et le pôle *p* se conservera, même après l'avoir mis en contact avec une masse de fer de volume illimité.

Si, au contraire, nous approchons un conducteur A d'un conducteur B (fig. 48), les choses se passeront autrement, car si

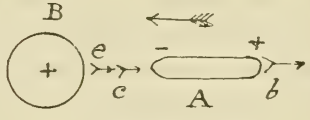


Fig. 48.

nous mettons le pôle *b* en communication avec une masse conductrice de volume illimité, puis si nous enlevons cette masse, l'extrémité *b* aura perdu toute polarité.

Il résulte de ceci que, contrairement à ce qui se passe pour l'aimant, le travail résultant de l'attraction et du rapprochement de *c* et de *e* n'est pas seulement employé à orienter les éléments, mais en même temps à les séparer de la matière, à *dématérialiser* celle-ci, suivant l'expression très juste du Dr Gustave le Bon. Lorsque nous aurons enlevé cet élément *b*, il n'existera plus de *travail* disponible pour en dématérialiser un autre, et toute manifestation électrique disparaît, bien que la force d'orientation soit toujours présente.

Au lieu d'employer à la dématérialisation le travail correspondant au rapprochement de *c* et de *e*, nous obtiendrons exactement les mêmes résultats dans un cristal où l'orientation existe, de même que dans le système ci-dessus, en utilisant le travail correspondant à une variation de température, lequel déterminera une variation d'énergie gyrostatique comparable

à celle qui se développe à la surface de A, si l'on vient à faire varier la distance de A à B, la libération de l'ion s'exécutant du reste de la même manière.

Il est inutile de dire que le rapprochement des conducteurs correspond à l'élévation de température, que l'écartement correspond au refroidissement.

En réalité, chaque fois que nous déchargeons un conducteur électrisé par influence, nous lui enlevons une certaine quantité de sa substance, quantité qui est comparable à celle qui s'élimine par radioactivité.

L'expérience de Volpicelli, seule, devrait suffire pour nous convaincre de la réalité de cette proposition, que l'électricité, de même que le magnétisme, est déterminée par une orientation d'éléments. Ce physicien, en déterminant des frictions dans un sens unique, sur un cylindre en cuivre recouvert de résine, à l'aide d'un anneau en cuivre, est parvenu à établir des pôles électriques de noms contraires, analogues à ceux de l'aimant.

Ne voyons-nous pas là l'analogue incontestable de ce qui se passe dans l'outil d'acier qui s'aimante par suite de la friction déterminée dans le même sens par le métal qu'il attaque?

Faisons encore cette remarque importante, qu'il résulte de ce que nous avons dit, notamment dans le chapitre des gaz, que le magnétisme est une propriété atomique et non une propriété moléculaire. Lorsque le fer atteint la température de *semi-fusion* à laquelle il se laisse forger tout en perdant ses propriétés magnétiques, il n'éprouve pas seulement une modification dans le mode de groupement de ses fibres gyrostatiques, mais la fibre atomique est elle-même modifiée, l'orientation ionique cesse d'être à peu près la même dans les deux sens.

Il en est nécessairement de même lorsque nous voyons le magnétisme se modifier avec la température, et cela de façons très différentes, avec la substance que l'on considère.

Combien la conception de l'atome doit-elle être différente de celle du petit corps dur inerte des chimistes!

Lorsqu'il s'agit de corps conducteurs, il est également facile de concevoir la production de courants dus à l'action de la

chaleur, mais l'établissement de ceux-ci ne peut plus se concevoir par la considération de la fibre axiale, mais bien par celle des fibres iodynamiques qui caractérisent les conducteurs.

Ainsi que nous l'avons vu, les courants électro-thermiques dirigés en tous sens et qui président à l'établissement de l'équilibre de température, dans les conducteurs, ainsi qu'à la conduction de la chaleur par induction électro-magnétique, due à l'oscillation calorifique des ions, sont représentés par l'image (fig. 49).

Les isothermes sont les lignes d'égale intensité de courants.

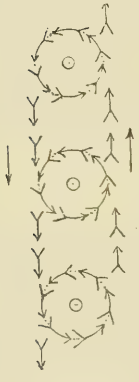


Fig. 49.

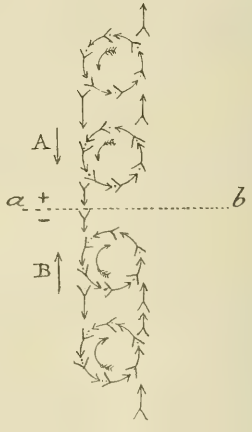


Fig. 50.

Ainsi que nous l'avons dit et ainsi que l'expérience le confirme, la conductibilité électrique et la conductibilité calorifique sont des grandeurs proportionnelles.

Il est facile de voir, d'après la figure 50, comment un courant thermo-électrique s'établit entre un corps électro-positif A et un corps électro-négatif B. L'un des courants, celui de droite, est rompu.

Mais il ne suffit pas, pour que ce résultat soit obtenu, que le corps soit électro-positif et électro-négatif, il importe également que les axes des molécules solidogéniques se disposent normalement à la direction du courant, c'est-à-dire parallèlement à la surface. Si l'inverse a lieu, on constatera les actions de contact

électrostatiques (pyro-électricité dans les cristaux). Il faut aussi que la forme des ions permette une adaptation convenable.

Supposons maintenant que l'on mette un deuxième métal en contact avec le premier (fig. 50), il est électro-négatif, ou tout au moins moins électro-positif. Nous voyons, d'après la figure, que, dans ce cas, les projections ioniques positives se raccordent avec les projections ioniques négatives, d'où résulteront les conséquences suivantes : 1° il s'établira un courant gyrostatique d'éther passant d'un métal à l'autre; 2° l'intensité de ce courant sera régie par celui des deux métaux dont l'ion possède la plus grande force électromotrice; 3° la neutralisation se produira par induction électrostatique à chaque instant, au point de soudure, par cela que les ions α et β sont doués de mouvements dirigés en sens contraire; 4° puisque la température définit l'intensité du mouvement gyrostatique qui détermine le courant, celui-ci sera d'autant plus intense, la force motrice d'autant plus grande que la température sera plus élevée; 5° *si rien ne se modifie dans l'arrangement des atomes* ou dans l'arrangement des ions dans l'atome, l'intensité du courant croîtra proportionnellement à l'accroissement de température de la soudure ou de l'énergie gyrostatique; 6° si nous dirigions artificiellement un courant en sens contraire du courant ainsi naturellement établi, nous diminuerions l'intensité de ce courant et, par conséquent, l'intensité du mouvement gyrostatique qui lui correspond, d'où abaissement de température (effet Peltier).

Supposons que l'on fasse agir l'aimant sur une substance parcourue par un courant (phénomène de Hall) de telle manière que la direction du courant soit normale aux lignes de force, les éléments tourbillons se disposeront parallèlement au plan *ab* (fig. 50), que la substance soit magnétique ou diamagnétique, et, de plus, les lignes équipotentielles du courant seront déviées dans le sens prévu par la figure 51.

Le sens du courant atomique est indiqué par l'orientation des ions ; il est parallèle ou de sens contraire au courant aimant A, suivant que la substance est magnétique ou diamagnétique. Les flèches *f* indiquent le sens de la rotation des tourbillons atomes.

Elles indiquent donc le sens de la déviation de la projection ou du courant ionique.

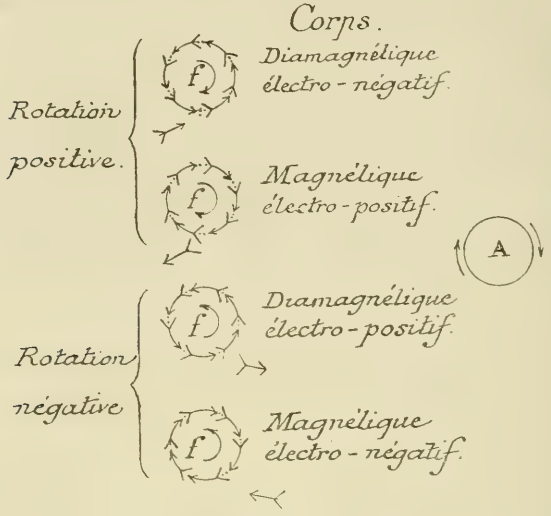


Fig. 51.

Nous voyons donc que sous l'action gyrostatique de l'aimant, la ligne de courant *ab* subit une rotation, α par exemple (fig. 52).

Mais, ainsi que nous l'avons dit, alors même que l'on n'établit pas *artificiellement* une différence de potentiel entre deux points du métal, celui-ci est parcouru en tous sens par les courants qui définissent la température, et une ligne d'égale intensité de courant, de même que pour le courant artificiel ou de sens déterminé, correspond à une ligne isotherme.

Fig 52.

Nous voyons donc que si nous déterminons un flux de chaleur F normalement aux lignes de force, les isothermes subiront la même déviation que les lignes équipotentielles (le Duc) (fig. 53).

En même temps que les déviations que nous venons d'indiquer,

on remarque un accroissement de résistance électrique et une diminution de conductibilité calorifique.

Fig. 53.

Par suite de l'action de l'aimant, les chaînes ioniques tendent à s'enrouler autour de l'atome (fig. 54).

Nous voyons ce phénomène se manifester d'une manière tangible lorsque nous enroulons autour d'une ligne de force magnétique la chaîne ionique qui constitue le rayon cathodique. On sait que si l'on accentue l'intensité du champ, le tourbillon ionique se transforme en une série de fibres gyrostatiques déliées dont le nombre est proportionnel à l'intensité du champ et qui fournissent l'image parfaite et agrandie de la fibre atomique.

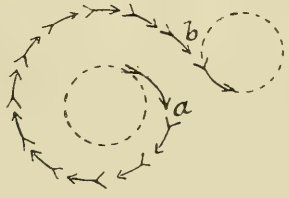


Fig. 54.

Remarquons que si l'intensité du champ magnétique devenait suffisante, les chaînes ioniques finiraient par s'enrouler autour de leurs atomes respectifs, *a* et *b* se raccorderaient et à partir de ce moment nous réalisons l'image de la substance *aniodynamique* non conductrice de l'électricité. Ainsi que nous l'avons vu, la conductibilité calorifique est alors due à l'induction axiale beaucoup plus faible, et l'on cesse de constater un rapport entre la conductibilité calorifique et la conductibilité électrique des

corps mauvais conducteurs, preuve de l'existence de deux modes de propagation.

C'est encore la matière à l'état solide qui va nous permettre de vérifier cette proposition du premier chapitre, d'après laquelle le phénomène de la phosphorescence préside à la genèse de la matière.

Dans un remarquable travail, le Dr Gustave le Bon a résumé et complété, par des expériences nouvelles, l'état de nos connaissances sur le phénomène de la phosphorescence. Comme il le fait remarquer à juste titre, cette manifestation, qui semblait exceptionnelle, se montre de plus en plus comme une manifestation générale de la matière. Cette conclusion est l'analogue de celle qui concerne la radioactivité; là encore le Dr Gustave le Bon et nous-même sommes arrivés par des voies différentes et à peu près simultanément à la même conclusion.

Il résulte des considérations que nous avons développées antérieurement, que si l'atome est représenté par un tourbillon, constitué lui-même par les *ions* ou *dynamides* bipôles, la destruction de ces *tourbillons atomes* avec émissions d'ions bipôles doit se faire avec dégagement de chaleur. Ces émissions constituent les rayons α ou β, suivant l'orientation des ions projetés.

Cette hypothèse étant admise, nous voyons comment la matière se détruit pour passer à l'*état radiant* ou *infra-électrique*. Les corps incandescents, l'aigrette électrique, etc., sont le siège de cette manifestation; ils déchargent les corps électrisés et ne diffèrent des corps radioactifs que par la vitesse de projection ou la force de pénétration des ions libérés.

Mais si les physiciens se sont beaucoup préoccupés des phénomènes radioactifs et de leurs congénères que nous venons d'indiquer, et qui correspondent à la *destruction de l'atome tourbillon matériel,* ils semblent s'être moins préoccupés des phénomènes inverses qui accompagneraient la *formation,* la *genèse de l'atome.*

Or nous croyons pouvoir dire que si les phénomènes dits radioactifs et leurs congénères président à la destruction de l'atome, le phénomène de la phosphorescence préside à sa genèse.

La condition fondamentale pour que l'on puisse observer des phénomènes radioactifs ou de phosphorescence est qu'il existe, dans le milieu observé, des ions à l'état de liberté; c'est la raison pour laquelle ces deux ordres de phénomènes s'observent dans des conditions analogues.

Le radium est phosphorescent et radioactif.

Cependant, en y regardant de plus près, nous avons constaté un fait qui nous a vivement frappé à l'époque où nous l'avons observé, mais dont la cause nous échappait alors : Si l'on approche d'un électroscope chargé une source mettant des ions en liberté, telle qu'une flamme de Bunsen ou une étincelle jaillissant entre une électrode de platine et de l'eau, on constate que la décharge est très rapide. Mais si nous développons dans ces sources le phénomène de la phosphorescence en introduisant un sel alcalin, par exemple, dans la flamme ou dans l'eau à la surface de laquelle jaillit l'étincelle, le phénomène radioactif est à peu près complètement enrayé, l'électroscope se décharge faiblement (1).

Les manifestations de radioactivité et de phosphorescence sont donc complémentaires. Lorsque l'ion s'échappe de l'atome tourbillon, il *dégage de la chaleur;* au contraire, lorsque l'ion pénètre dans le tourbillon atomique, pour le régénérer, il émet de la *lumière froide*, non de la chaleur, car le phénomène est accompagné d'une *absorption d'énergie.* Il n'y a pas acroissement du mouvement gyratoire de l'élément qui reçoit la vibration. On sait que cette lumière, concentrée au foyer d'une forte lentille, ne détermine aucune élévation de température, ainsi que le montre le Dr Gustave le Bon.

Si nous exposons une substance à des vibrations suffisamment rapides, celles-ci auront pour effet de mettre en liberté un certain nombre d'ions. Cela étant, deux cas pourront se présenter : ou bien ces ions seront définitivement libérés, s'échapperont du milieu matériel en rendant les gaz conducteurs, ainsi que le Dr Gustave le Bon l'a montré pour un grand nombre de

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), p. 149, 1900.

métaux; ou bien les ions libérés tendront à rentrer dans le tourbillon atome dont ils ont été expulsés.

Or ce serait cette dernière circonstance qui serait accompagnée du phénomène de phosphorescence avec absorption de chaleur. Les vibrations lentes tendent à reconstituer l'atome, mettent rapidement fin à ce phénomène de reconstitution en l'activant momentanément. Le sulfure de calcium montre très nettement ce phénomène; le sulfure de zinc à phosphorescence verte manifeste le même phénomène, mais avec cette différence, que l'extinction produite par les grandes longueurs d'onde est instantanée; il y a donc de plus pour cette substance amortissement des vibrations rapides par les vibrations lentes.

Le nombre d'ions libres entraînés par l'action centripète dans le tourbillon atome sera d'autant plus grand que la vitesse de gyration sera plus grande, que la température sera plus élevée. Chaque élévation de température détermine donc l'absorption d'un certain nombre d'ions, augmente le vide ionique de l'espace ambiant.

Le degré de vide ionique correspondant à une température donnée étant réalisé, la phosphorescence prend fin pour reprendre à une température plus élevée.

Les actions centrifuges du tourbillon tendent à développer la radioactivité, les actions centripètes, la phosphorescence.

Si nous examinons de plus près l'image que nous nous faisons de la matière, nous voyons que les oscillations rapides tendent à produire l'action pulsante de Bjerckness et la répulsion qui en est la conséquence, alors que les grandes longueurs d'onde tendent plutôt à produire une espèce de lissage, qui oriente tous les éléments dans un sens déterminé, de manière à favoriser l'action réciproque des pôles de noms contraires, la production de la fibre ionique.

En résumé, des oscillations très longues, correspondant à des températures très basses ou même ne correspondant plus à de la chaleur, peuvent déterminer la luminescence dans un milieu renfermant des ions à l'état de liberté, et, mieux encore, le courant continu qui correspond à une oscillation dont la durée est infinie.

La température constitue donc un facteur indépendant de la luminescence.

Le Dr Gustave le Bon a montré qu'un écran placé dans l'air liquide soumis à des radiations à oscillations rapides devenait luminescent, lorsqu'on le retirait, sous l'influence des oscillations calorifiques ambiantes.

Un gaz à très basse pression renferme des ions libres ; lorsque le courant passe, il devient luminescent.

Les ions qui président au phénomène de la phosphorescence sont les ions α, orientés négativement ou positivement au moment où ils pénètrent dans le tourbillon atomique Δ (fig. 55).

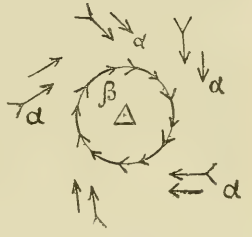


Fig. 55.

Les nébuleuses nous présentent sur une vaste échelle la phosphorescence présidant à la genèse des mondes.

Le phénomène de la fluorescence est identique au phénomène de la phosphorescence, avec cette seule différence que le nombre d'ions émis par l'atome est égal au nombre d'ions qui le reconstituent. Dans ces conditions, le phénomène cesse au moment où la lumière cesse d'agir. Il est du reste aisé de concevoir qu'il puisse en être ainsi, si l'action dissociante des petites longueurs d'onde compense la tendance à la reconstitution.

Si les grandes longueurs d'onde sont supprimées, si nous dirigeons par exemple sur la substance un faisceau de rayons ultra-violets, nous assistons à une véritable phosphorescence.

Les raies brillantes des spectres fournis par les gaz sont dues aux ions α environnant l'atome et tournoyant autour de celui-ci. Ce sont ces ions également qui déterminent l'absorption sélective correspondante.

Si la production de la *phosphorescence* ne nécessite pas la présence d'une haute température, mais simplement l'action de grandes longueurs d'onde qui peuvent même ne plus correspondre à la manifestation calorifique, il en est autrement du phénomène de l'*incandescence*, qui est dû aux vibrations des ions β

faisant partie de l'atome lui-même (fig. 55). En résumé, l'incandescence est déterminée par la vibration des chaînes ioniques, alors que la phosphorescence est déterminée par la vibration d'ions libres. Les gaz ne deviennent pas incandescents, ou tout au moins très faiblement, lorsqu'ils émettent de la lumière, c'est toujours par phosphorescence.

Lorsque la température s'élève, les vibrations de longue durée se manifestent d'abord, puis à celles-ci s'ajoutent des vibrations de plus en plus courtes. Mais lorsque ces dernières atteignent une certaine rapidité, l'action répulsive due à l'effet Bjerckness se manifeste d'une manière suffisante pour produire le départ d'ions, la radioactivité, la décharge de l'électroscope.

Plusieurs physiciens, notamment MM. E. Wiedemann et le Dr Gustave le Bon, ont attribué le phénomène de la phosphorescence à une combinaison chimique. En réalité, s'il en était ainsi, les petites quantités de substances étrangères qui se trouvent, par exemple, dans le diamant ne tarderaient pas à se combiner définitivement et la pierre perdrait de sa valeur après quelque temps.

On ne constate rien de pareil. Si donc de petites quantités de substances étrangères sont nécessaires, elles ont simplement pour résultat de diminuer la stabilité de l'atome.

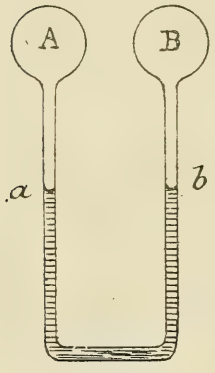


Fig. 56.

Indépendamment de cette considération, rien n'empêche du reste d'admettre que des réactions chimiques déterminent la phosphorescence au même titre qu'elles déterminent la radioactivité.

Voici comment on peut montrer les actions thermiques développées par la phosphorescence :

Si l'on recouvre les boules A et B d'un thermoscope de Leslie de deux substances ayant des pouvoirs absorbants différents (fig. 56), A étant, par exemple, recouverte d'un enduit de craie pilée, et B d'un enduit de noir de fumée, on remarque que si l'appareil est exposé à la

radiation solaire ou à la radiation d'une lampe à incandescence, la boule B s'échauffe davantage. La colonne *b* s'abaisse, la colonne *a* se relève, et il en est ainsi pendant tout le temps de l'exposition à la radiation : *ce caractère est permanent.*

Supposons maintenant que le noir de fumée soit remplacé par du sulfure de calcium phosphorescent, qui a à peu près le même pouvoir absorbant que la craie. Le phénomène observé sera alors tout différent. Si l'on expose l'appareil à un faisceau de radiations solaires qui renferme de petites longueurs d'onde, on remarque que la colonne *b* s'abaisse d'abord, comme si le sulfure de calcium avait un pouvoir absorbant plus grand, *mais ce phénomène n'est pas permanent,* et après un quart d'heure environ l'appareil est revenu au zéro.

Ainsi se trouve vérifiée la première partie de la théorie. Les petites longueurs d'onde déterminent la sortie d'un certain nombre d'ions de l'atome, lesquels constituent autour de ce dernier une espèce d'atmosphère phosphorescente. Or, tant que la sortie de ces ions, sous l'action des petites longueurs d'onde, l'emporte sur les rentrées déterminées par les grandes longueurs d'onde, il y a tendance à destruction de l'atome, à désassimilation ou à dématérialisation, suivant l'expression du Dr Gustave le Bon. Ce phénomène est accompagné d'un dégagement de chaleur, mais ce dégagement cesse de se produire lorsque l'assimilation devient égale à la désassimilation : l'atmosphère ionique phosphorescente est alors saturée.

L'appareil étant revenu au zéro, on supprime la radiation solaire et on la remplace par la radiation d'une lampe à incandescence placée dans le voisinage, et qui n'émet que de grandes longueurs d'onde. On constate alors que la colonne *b* se relève : il y a production de froid, mais après un quart d'heure environ, l'appareil est revenu au zéro.

Les grandes longueurs d'onde déterminent la rentrée des ions phosphorescents dans l'atome : il y a reconstitution de matière, assimilation ou matérialisation, avec absorption d'énergie. Lorsque l'assimilation est achevée, l'appareil revient au zéro.

Nous voyons donc l'espèce ou l'atome chimique se comporter

à peu près comme l'être doué de vie, qui assimile et désassimile, qui vit et qui meurt suivant les conditions du milieu dans lequel on le place.

En mettant sous presse, nous constatons avec satisfaction que MM. Lénard et Klatt, dans leur travail sur la phosphorescence, arrivent exactement à la même conclusion. D'après eux, la phosphorescence serait due au retour à leurs trajectoires originelles, suivant un mouvement oscillatoire, des charges électriques négatives arrachées aux atomes pendant l'excitation. Ceci se traduit dans notre théorie en disant que les ions arrachés à l'atome pendant la période d'excitation y rentrent en vibrant, orientés négativement. Cela se conçoit facilement, mais je me demande quel genre de mouvement les corpuscules négatifs peuvent bien posséder en retournant à l'atome. Dans tous les cas, il doit être conçu d'une manière assez singulière, et la cause de ce mouvement est encore plus inexplicable.

CHAPITRE V

La destruction et la fin de la matière.

Considérations générales. — L'explosif matière. — Divers procédés de dématérialisation. — Le zéro absolu.

Les espèces chimiques dont nous venons de développer la vie, pas plus que les espèces animales, ne peuvent vivre que dans certaines conditions, endéans certaines limites de température. Le froid excessif, de même que l'excessive chaleur, les tue. La pression intervient également pour maintenir ou altérer leur état de santé. Certaines espèces de poissons ne peuvent vivre que sous de très hautes pressions, et meurent si la dépression s'accentue au delà d'une certaine limite.

Tel est bien le cas du radium. Cette espèce chimique, née au sein de notre globe sous des pressions formidables, y vivait en parfaite santé. Amenée à la surface, la pression n'est plus suffisante pour maintenir ses ions au sein du tourbillon. Aussi voyons-nous ses atomes se désassimiler, éparpillant leurs ions constitutifs dans le milieu ambiant, de manière à donner naissance soit à l'émanation, à l'état *supragazeux* qui semble être le résultat du déroulement de l'atome, ou encore aux projections ioniques qui nous fournissent les rayons α ou β, suivant le sens de l'orientation, et encore des rayons X ou des projections éthérées vibrantes, déterminées par les propulseurs ioniques.

En résumé, la désorganisation de l'atome radium serait due à la diminution de pression seule. Étant soumis perpétuellement à cette condition de vie défavorable, ses éléments meurent lentement.

Les autres espèces chimiques ne se trouvent généralement pas dans cette situation, du moins d'une manière aussi prononcée; cependant, beaucoup manifestent des traces d'un état semblable.

Il se serait donc simplement produit un emmagasinement d'énergie sous la forme matière au sein de notre globe, laquelle se libère à la surface par suite de la variation de pression.

Nous voyons que rien n'est là en opposition avec le principe de la conservation de l'énergie.

La matière détient emmagasinée de formidables quantités d'énergie. Si 1 gramme de matière venait à se libérer brusquement, le résultat obtenu serait tel que les explosifs les plus énergiques ne sont qu'une faible image de l'*explosif matière*, ainsi que le fait remarquer le Dr Gustave le Bon dans son travail magistral.

Cependant, j'incline à croire qu'il ne sera jamais donné à l'humanité de libérer cette énergie en quantité suffisante pour devenir *pratiquement* utile.

Remarquons, en effet, qu'à moins de découvrir des gisements abondants de radium ou de substances semblables, l'énergie emmagasinée dans un atome stable ne peut se libérer qu'en dépensant pour cette libération une quantité d'énergie équivalente.

Si nous suivons l'ordre chronologique, remarquons que la radioactivité a été montrée pour la première fois par le Dr Gustave le Bon en dirigeant sur des métaux (plus particulièrement l'aluminium) un faisceau de rayons lumineux.

L'intensité du phénomène est trop faible pour montrer la quantité de chaleur développée, mais elle existe certainement, de même que pour le radium, mais avec cette différence fondamentale qu'il a fallu dépenser une quantité d'énergie équivalente pour sa libération.

Nous pouvons concevoir deux procédés de dématérialisation :

1° Les procédés qui comportent une dépense de travail équivalente à la quantité d'énergie libérée par voie de dématérialisation. Dans ces conditions, il n'y a pas de contradiction *apparente* entre le principe de la conservation de l'énergie et ce que l'on observe;

2° Les procédés qui, en établissant un déséquilibre atomique permanent, donnent l'illusion d'une création d'énergie. Le radium en fournit l'exemple le plus frappant.

Les deux procédés libèrent donc une certaine quantité d'ions. Cela étant, deux cas pourront se présenter :

1° Les ions seront orientés dans le même sens, et dans ces conditions se manifestera l'apparence électrique;

2° Les ions sont indifféremment orientés dans tous les sens, et alors se produiront les manifestations infra-électriques;

3° Les projections des ions orientés dans un sens ou dans l'autre constituent les rayons α et β déviables par l'aimant.

Examinons d'abord les sources d'énergie spontanée résultant de l'absence d'équilibre atomique.

La fibre atomique s'étant formée au sein des corps célestes, dans certaines conditions de *température* et de *pression*, l'état d'équilibre peut être rompu si ces conditions viennent à varier. Les substances radioactives de poids atomique considérables, formées vraisemblablement au sein de notre planète, voient leur atome se désagréger spontanément sous la pression négligeable de notre atmosphère.

Un deuxième cas, tout aussi intéressant, qui semble ne pas avoir attiré l'attention des physiciens, est celui présenté par tous les corps incandescents.

Sous les pressions négligeables que nous supportons, tous les corps se dématérialisent déjà considérablement à partir du rouge. Ils émettent déjà des flots d'*infra-électricité* qui permettent de réaliser nos figures géométriques de projection (1), même plus rapidement qu'à l'aide des substances radioactives dont les projections sont orientées.

Il semble donc qu'un corps à haute température, de même que ces dernières substances, doit dégager de la chaleur spontanément. Un corps incandescent se trouverait, en réalité, à une température supérieure à celle que l'on observerait si ce phénomène n'entrait pas en jeu. Les très hautes températures détermineraient donc la production de quantités de chaleur pratiquement gratuites, et il est tout à fait inutile d'avoir recours au radium pour expliquer la conservation de la chaleur solaire, tous

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité*, p. 76.

les corps se comportant de la même manière à une température suffisamment élevée.

Donc sans dépense de travail ou sans production d'une variation ou d'une chute de température, nous trouvons de l'énergie libre.

Examinons maintenant le cas inverse, où l'on ne récolte jamais que la quantité d'énergie dépensée sous une forme différente.

L'atome est en équilibre dynamique; il faut dépenser du travail pour le désorganiser, travail que nous retrouverons en quantité équivalente sous la forme électrique.

Les procédés employés sont les procédés d'électrisation, mais qui tous utilisent le travail dépensé à produire une variation de l'énergie gyrostatique des chaînes ioniques.

Ces effets se réaliseront, par exemple, par frottement ou par simple contact; les corps en présence se communiquent alors réciproquement des vitesses gyrostatiques différentes de celles qui correspondent à l'état normal à une température donnée.

L'énergie gyrostatique des ions cesse d'être homogène.

Par simple influence, ainsi que nous l'avons vu plus haut, le travail emmagasiné par la *chute* de A vers B (fig. 57) a eu pour

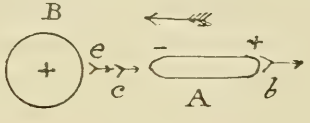


Fig. 57.

conséquence de libérer, de dématérialiser l'ion *b*. Inversement, si nous enlevons, si nous utilisons l'énergie *b* et si nous écartons A, nous dépenserons une deuxième somme de travail, égale à la première et qui aura pour résultat de dématérialiser *c*, de rendre son énergie libre.

Les énergies ainsi libérées seront donc de signes contraires.

Le même résultat sera évidemment obtenu sans modifier les distances; si nous développons l'énergie de gyration en B, *b* sera libéré.

Demandons-nous maintenant quels sont les moyens que l'on peut mettre en œuvre pour accroître l'énergie de gyration. Nous avons vu que pour un corps donné, ayant une faculté vibratoire ou de dissiper l'énergie, déterminée, la température croît avec l'énergie gyrostatique.

Donc nous pourrons réaliser les phénomènes que nous venons d'indiquer et relatifs à l'influence à l'aide d'une simple variation de température. Il suffira pour cela de faire usage d'une substance dont les ions sont orientés, c'est-à-dire d'un cristal; il importe également que la substance soit non conductrice, afin de réaliser le phénomène d'influence.

L'accroissement d'énergie gyrostatique déterminera la libération des ions b, b' (fig. 58).

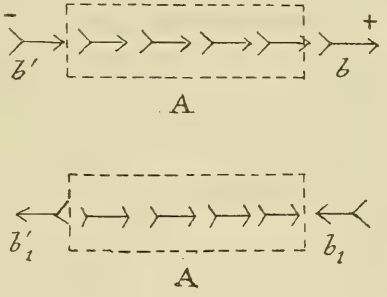


Fig. 58.

L'abaissement de température déterminera la libération des ions orientés en sens contraire b_1 b'_1.

D'après cette figure, les choses se passent comme si nous avions diminué le caractère positif de B (fig. 57).

Ce mécanisme semble, du reste, étroitement lié à la capacité diélectrique. En effet, concevons un conducteur A électrisé, par

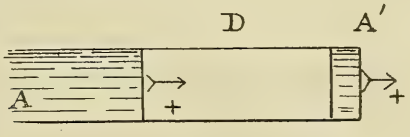


Fig. 59.

exemple, positivement et électrisant le conducteur A′ par influence, par l'intermédiaire du diélectrique D (fig. 59).

Or, si nous élevons la température de D et si nous supposons A′ préalablement déchargé, ce conducteur acquerra une

nouvelle charge par suite de la diminution de capacité de D, résultant de l'élévation de température.

Et si nous nous rapportons à l'expérience faite à l'aide du cristal, qui est, en réalité, identique, nous voyons que, toutes choses étant égales, la diminution de capacité correspond à un accroissement d'énergie gyrostatique.

Le refroidissement donnera lieu à l'effet inverse.

Dans l'expérience que nous venons d'indiquer, il faut considérer deux phases.

Une première phase, qui s'observe lorsque A s'approche de B (fig. 57). Le travail emmagasiné par le rapprochement de A et de B est employé à *libérer*, à *dématérialiser* les ions *b* et *c* et à les orienter.

Mais il n'y a pas eu courant (du moins tel qu'il se produit dans les conducteurs, ainsi que l'affirme Maxwel) et l'expérience vérifie ce que nous disons : il n'y a pas d'action électro-magnétique.

Les ions sont donc maintenant *libérés*; nous avons bien transmis la polarité *e* disponible au travers d'un diélectrique en *b*. Mais cela ne serait d'aucune utilité, si nous ne pouvions détacher ces ions libérés de la surface matérielle à laquelle ils ont, en réalité, cessé d'appartenir. Il y aura courant si nous approchons A de B; *e* et *c*, se précipitant l'un vers l'autre, se neutraliseront par *induction électrostatique* (le courant de l'étincelle suit généralement une spire hélicoïdale). Les éléments iodynamiques d'un conducteur joueront le même rôle si l'on relie *e* et *c*.

Lors du passage du courant en pleine matière, les choses se passent d'une manière analogue; aussi les ions détachés de l'atome et en restant séparés après le passage du courant, manifestent-ils des phénomènes radioactifs.

Concluons que sans l'induction électrostatique, l'énergie électrique ne saurait être libérée.

Nous venons d'interpréter les phénomènes qui produisent ce que nous pourrions dénommer *dématérialisation lente*. Des quantités infinitésimales de la *phase substantielle matière* se transforment en déterminant une phase substantielle supérieure, la *phase chaotique* ou *infra-électrique*.

Cependant qu'adviendrait-il si une quantité considérable de substance appartenant à la *phase matière* passait brusquement à la *phase chaotique*, abandonnant, par conséquent, ainsi brusquement les quantités formidables d'énergie que comporte la phase matière, ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre I[er]? La matière prendrait alors instantanément les propriétés de l'éclair, l'énergie développée se propagerait avec une vitesse comparable à celle de la lumière, et l'espace occupé par le corps matériel, après s'être prodigieusement dilaté, ne renfermerait plus que la substance à l'état chaotique ou nébulaire. L'énergie emmagasinée dans la matière s'est dissipée en un temps très court et a produit l'apparence de l'étoile nouvelle, laquelle n'a pas tardé à faire place à une nébuleuse de dimensions très étendues.

Il est aisé de se rendre compte de la cause de cette brusque dématérialisation. En effet, les éléments substantiels fonctionnent comme un mécanisme d'une précision admirable, sans frottement; tous les éléments sont parcourus par des courants circulaires dont les oscillations synchrones n'ont d'autre but que de maintenir les éléments ioniques à distance les uns des autres.

Mais qu'adviendrait-il si les pulsations venaient à s'arrêter par suite de l'abaissement de température, ou même si, à une température élevée, la pression devenait suffisante pour amener le contact ou le *grippement* des ions?

L'équilibre dynamique du mécanisme matériel serait rompu, et comme nous l'avons vu, la mise en liberté de l'énergie correspondant à la *phase matérielle* serait instantanée.

Or, c'est là précisément ce qui se produit dans l'étoile nouvelle. Celle-ci possède une grande masse, d'où pressions énormes dont l'effet néfaste est équilibré par une température élevée. Mais il arrivera un moment où la perte de chaleur sera suffisante pour amener le contact ionique et l'explosion finale.

Poursuivons encore quelque peu cette étude.

L'un des caractères les plus intéressants de l'évolution des sciences physiques se trouve dans ce fait que les deux méthodes qui se montrent antagonistes, la méthode analytique et la méthode synthétique, arrivent par des procédés bien différents à la même conclusion.

Les considérations émises concernant le zéro absolu présentent sous ce rapport le plus vif intérêt. Nous allons résumer successivement les conclusions *analystes* et les conclusions *synthétistes*.

Le zéro absolu ne peut avoir aucune existence réelle; telle est la conclusion à laquelle sont conduits plusieurs savants de l'école analyste, parmi lesquels nous citerons MM. Pellat, Lippmann, Ariès et Witz.

La démonstration la plus simple, qui est due à M. Arjès, est d'une rigueur absolue : « En poursuivant le tracé des cycles » jusqu'au zéro absolu, nous trouverons finalement une portion » d'isotherme sur laquelle la chaleur absorbée devient nulle. » L'isotherme du zéro absolu représente donc une opération » faite sans variation de chaleur : c'est une adiabatique. Les » adiabatiques tendent, en s'approchant du zéro absolu, vers » l'isotherme limite de ce zéro absolu. »

M. Witz nous donne également une élégante démonstration : « Le rendement du cycle de Cornot est égal à $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, quotient » de la chute de température par la température du foyer. Or » si T_2 devenait égal à zéro, le rendement serait égal à l'unité, » quelle que fût la valeur de T_1, c'est-à-dire quelle que fût la » chute de température, ce qui ne peut être admis (1). »

Telle est la conclusion qui aurait sans doute découragé les synthétistes, à la tête desquels se trouvent Bernouilli, Krönig, Clausius, Maxwell et d'autres, s'ils n'avaient eu conscience que le processus synthétique des sciences physiques diffère totalement du processus analyste.

Un gaz est formé d'éléments ou molécules en mouvement; ce sont les chocs de ces molécules qui déterminent la pression. Si nous diminuons la température, les chocs diminuent, et, finalement, si la vitesse des éléments devient nulle, les chocs et la pression disparaissent, les éléments s'accumulent *sans mouvement* les uns sur les autres, *la matière est morte*, le zéro absolu est atteint.

Cette conception représente un exemple des plus intéressants d'un stade du mouvement évolutif de la synthèse.

(1) *Revue des questions scientifiques*, 1904.

Si l'analyste entre de plain-pied dans la vérité, il en est tout autrement du synthétiste. Aussi n'éludera-t-il pas le sourire de son confrère analyste. Mais il est à remarquer que le synthétiste recherche des vérités d'un *autre ordre*. De plus, celles-ci apparaîtront progressivement et non tout d'une pièce. Une théorie synthétiste *ne sera jamais parfaite;* car, pour qu'il en puisse être ainsi, nous devrions pouvoir scruter les profondeurs insondables de la substance, ce qui est irréalisable.

C'est ici le lieu de citer une parole remarquablement juste de M. Lévy-Bruhl (1) : « En science, la vérité *n'est pas*, mais elle *se fait* constamment de plus en plus complète, de plus en plus exacte ». L'analyse mathématique seule peut prétendre connaître la vérité avec rigueur. Mais à partir du moment où, contrairement à l'opinion de M. Lévy-Bruhl, on voudra introduire uniquement cet *esprit* dans la science de la nature, il nous conduira à la stérilité la plus complète.

Mais s'il en est ainsi, nous pourrons du moins nous rapprocher indéfiniment de la vérité sans jamais l'atteindre complètement, ce à quoi l'analyste ne se résignera jamais : il préfère abandonner la partie si la lumière n'est pas complète.

Les synthétistes n'ont voulu, en créant la théorie des gaz, qu'interpréter une seule manifestation de l'énergie, l'*énergie calorifique*. Ils n'ont nullement songé à interpréter les manifestations électriques et magnétiques. C'est une des raisons pour lesquelles cette théorie est incomplète et doit nécessairement conduire à des discordances. De même qu'une théorie tenant compte de ces dernières manifestations sera encore incomplète parce qu'elle ne tient pas compte du phénomène de la vie et d'autres phénomènes qui nous sont probablement cachés.

En tenant compte des phénomènes magnétiques et électriques, le nombre des conséquences inadmissibles, s'il n'est pas nul, sera tout au moins diminué. Nous nous serons rapprochés davantage de la vérité que nous ne pourrons jamais atteindre.

La notion de l'atome tourbillon, jointe à la conception de l'ion

(1) *La morale et la science des mœurs,* Paris, 1904.

dissymétrique aspirant et foulant (1), permet déjà de se représenter, dans leurs grandes lignes, les phénomènes électriques et magnétiques, et de concevoir la liaison qui unit ceux-ci aux phénomènes calorifiques.

Le zéro absolu, ainsi que nous l'avons vu, serait la température à laquelle tout mouvement vibratoire serait supprimé, et par conséquent tout mode d'embrayage ou de transmission de l'énergie; il doit donc se définir, ainsi que nous l'avons admis, comme étant *la température à partir de laquelle l'énergie de mouvement (de gyration) de la matière devient constante*, et non pas nulle.

Demandons-nous, en concevant ce mécanisme, si une semblable température peut être atteinte, ou mieux, *si à cette température la matière fonctionnerait encore suivant les lois simples que nous connaissons et prévues par la thermodynamique.*

L'analyste conclut avec raison à une absurdité. Le synthétiste doit conclure à un état d'équilibre impossible, à la destruction de la matière. En effet, comme nous l'avons dit, si petite que soit la distance qui sépare les tourbillons, si faible que soit la température, les tourbillons fonctionneront sans frottement, sans perte d'énergie. Mais s'il en était autrement, si les tourbillons entraient en contact réel, les frottements réciproques détermineraient la destruction du tourbillon, la destruction de l'atome, avec mise en liberté d'une formidable quantité d'énergie. Le zéro absolu est donc incompatible avec l'existence de la matière. L'analyse et la synthèse aboutissent au même résultat par des chemins bien différents.

Il est impossible de nier l'existence d'une énergie que la matière posséderait encore au zéro absolu s'il était réalisable. L'aimant subsiste aux plus basses températures. Si l'on soumet un rayon cathodique à un champ magnétique, le premier s'enroule *avec dépense continuelle d'énergie, émise par l'aimant.* On ne peut admettre cependant que celui-ci en renferme en quantité infinie, et cependant ce réservoir d'énergie paraît inépuisable.

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nº 2, p. 138, 1902.

L'élément matériel se comporte donc comme un volant qui tournerait dans un fluide tourbillonnant, sa masse et sa vitesse lui permettent d'accumuler une énorme quantité d'énergie, laquelle lui est constamment restituée par le milieu ambiant si elle tend à diminuer par suite d'une dépense quelconque.

Si la quantité d'énergie inhérente à la *substance matérielle* vient à se dissiper, la matière cesse d'exister, et nous voyons apparaître des phénomènes électriques et radioactifs. Ces symptômes de destruction de la matière se manifestent de préférence aux températures les plus élevées et aux températures les plus basses, c'est-à-dire aux limites de son existence possible. Si, par suite de l'existence de très basses températures et de pressions formidables qui se manifestent au sein des astres, l'état équivalent à celui du zéro absolu se réalise, la matière passe brusquement à l'état chaotique, radiant ou infra-électrique. Les ions sont séparés les uns des autres, projetés avec la vitesse de la lumière; l'atome matériel est détruit. Nous voyons apparaître l'étoile nouvelle (1), avec formidable émission d'énergie, éclair gigantesque que l'imagination se refuse à concevoir, et production de corps à l'état fragmentaire, de météorites. La nébuleuse apparaît, les ions reprennent lentement au milieu ambiant l'énergie nécessaire à la reconstitution de la matière, un nouveau soleil se produit. L'entropie de l'univers ne tend pas vers une limite, elle est constante.

La substance parcourt depuis l'infini des temps un cycle fermé et le parcourra éternellement. L'énergie ne se dissipe pas, et lorsqu'en un point du ciel nous voyons apparaître une nébuleuse, nous assistons à la transformation de l'énergie perdue, sous forme de rayonnement, par les corps célestes, en *énergie matière.* En résumé, la formation nébulaire peut être spontanée, ou bien elle peut représenter le résidu d'un monde ayant déjà existé, capable, du reste, de récupérer par le même processus son énergie perdue.

(1) *Prodrome de la théorie mécanique de l'électricité,* p. 143.

CHAPITRE VI

Conception de la masse et de l'attraction newtonienne.

Aux trois phases substantielles physiques correspondent trois modes d'attraction. — Influence de l'orientation sur la grandeur « masse ». — Raison pour laquelle on a été amené à la conception de corpuscules positifs *gros*. — Raison de l'asymétrie des pôles. — Géotropisme des plantes.

Voici comment, dans la théorie que nous proposons, on peut concevoir l'attraction newtonienne ainsi que la masse.

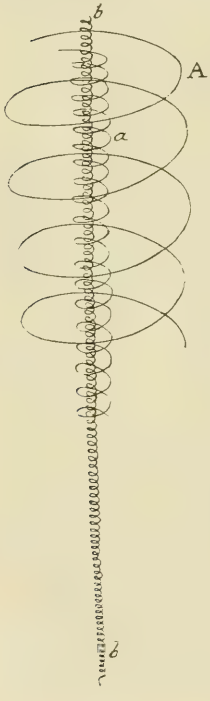


Fig. 60.

Considérons notre spire *électro-magnétique* A fournie par l'enroulement de la spire *électro-statique* a, laquelle est elle-même déterminée par l'enroulement de la fibre d'éther gyrostatique *b* (fig. 60).

Concevons maintenant que ces fibres d'éther gyrostatique, semblables à des cordons élastiques, et émis par tous les corps de l'univers, relient ceux-ci entre eux; telles sont, par exemple, les masses M*m* (fig. 61), montrant l'apparence de cette attraction.

Nous voyons, du reste, qu'un corps non soumis à l'action de la pesanteur se comporte comme s'il était sollicité de toute part par des fils élastiques.

Dès lors, la résistance que la matière oppose au mouvement est due à la tension des fibres *b*, qui la sollicitent. La masse d'un corps sera directement proportionnelle au nombre de fibres gyrostatiques qui sollicitent ce corps.

Ceci permet, du reste, de suggérer une expérience. Toutes les observations entreprises sur l'attraction des masses ont été

réalisées à l'aide de corps isotropes, mais on peut se demander si l'action exercée à distance par des masses cristallines ne dépendrait pas de l'orientation de ces cristaux. Il est donc possible que le nombre de fibres *b* qui sollicitent la matière ne soit pas le même suivant toutes les directions. Bien qu'il puisse se faire que les fibres d'éther s'infléchissant suivant toutes les directions, par suite de leur faible tension, ne puissent pas nous montrer d'une manière sensible l'influence de l'orientation. Mais nous allons voir qu'il peut en être autrement lorsque cette tension devient suffisante.

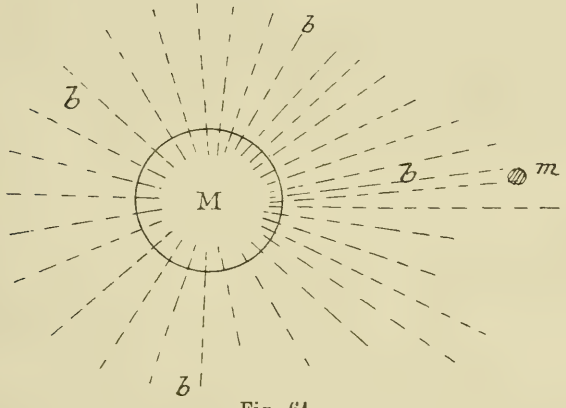


Fig. 61.

Ceci nous conduit du reste tout naturellement à la dissymétrie de la masse des ions, ainsi que cela résulte des recherches de Kaufmann.

Mais si nous appelons tourbillon de *premier ordre* celui qui préside à l'attraction newtonienne (*b*), celui qui préside à l'attraction électrostatique (*a*) sera de *deuxième ordre*, celui qui correspond à l'attraction électro-magnétique sera de *troisième ordre*.

Aux *trois* phases substantielles que nous avons été obligé de considérer dans le monde physique (fibre éther, fibre électrostatique, fibre électro-magnétique) correspondent donc naturellement les *trois* modes d'attraction que nous connaissons.

Il est aisé de voir que si la résistance au mouvement de l'ion n'est pas la même suivant la direction du mouvement que suivant une direction perpendiculaire, il doit en être ainsi, à fortiori, si l'on vient à le retourner. Lorsque projeté par l'atome tourbillon il est orienté négativement, le sens du mouvement correspond avec le sens de la propulsion due à la rotation de l'hélice, et l'inverse a lieu lorsque l'orientation est positive. La résistance au mouvement est alors incomparablement plus grande. C'est cette circonstance qui a donné lieu à cette singulière interprétation, que le corpuscule positif est à peu près aussi *gros* que l'atome! Et puisque l'ion orienté positivement se meut plus lentement que l'ion orienté négativement, il faudra, pour que l'équilibre dynamique du courant s'établisse, pour que la neutralisation se produise dans la même proportion aux deux pôles, il faudra un plus grand nombre d'ions à la cathode qu'à l'anode. *Telle est la raison de l'asymétrie des pôles.*

Nous voyons également que la masse de l'ion, c'est-à-dire la résistance au mouvement dans l'éther, dépend de la vitesse.

Sous l'action de la pesanteur les ions libres ont une tendance très faible par rapport aux autres actions à s'orienter verticalement. C'est vraisemblablement à cette action que l'on doit attribuer le *géotropisme* des plantes. Le pôle négatif ou aspirant tend, de plus, à être tourné vers la terre. Il en était déjà ainsi dans la nébuleuse originelle, ainsi que nous l'avons vu.

Il en résulterait que l'action newtonienne agit en sens inverse de l'action électrostatique tendant à produire la dématérialisation.

APPENDICE

APPENDICE PHILOSOPHIQUE

Examen des phénomènes analogues que l'on retrouve dans des phases substantielles différentes de celles du monde dit physique.

Nous admettons que la théorie que nous venons de développer est utile en nous plaçant au point de vue du progrès des sciences physiques, pour la seule raison qu'elle nous a permis de *classer* et de *prévoir* des faits, de les rendre cohérents. Ces conditions sont suffisantes, et il importe peu que cette théorie soit vraie, fausse ou fantaisiste, comme on voudra.

A l'instar d'une courbe reliant les points fournis par l'expérience, elle a permis d'en préciser d'autres, par intrapolation.

C'est là que s'arrête la mission du *physicien.*

Le domaine de la *physique* cesse là où commence le domaine de la *philosophie.* Cette dernière peut se demander si une théorie correspond à une pure fiction ayant simplement servi d'outil au physicien, ou bien si elle correspond à une réalité. Ici la question de sentiment devient pour ainsi dire la note dominante; et si nous admettons que la théorie correspond à la réalité des choses, nous adoptons une *croyance.*

Il est inutile de discuter ici si les croyances sont utiles ou nuisibles à l'humanité. J'incline à croire qu'elles sont plutôt nuisibles, par cela qu'elles déterminent généralement la discorde, mais, d'autre part, elles correspondent à une espèce de besoin de notre nature. Et s'il en est ainsi, la meilleure des croyances sera celle qui dérive de l'observation et qui peut-être préparera la science de l'avenir.

Admettons donc un instant comme réelle l'hypothèse que nous venons de faire, et voyons quels sont les résultats que l'on

obtiendrait si, au lieu de se contenter d'une intrapolation, nous effectuions une extrapolation de la courbe représentée par notre théorie.

Rappelons que nous avons eu à considérer, dans l'étude des phénomènes physiques, trois substances emboîtées les unes dans les autres : 1° la phase matière, qui correspond aux phénomènes électro-magnétiques; 2° la phase supramatérielle, qui correspond aux actions électrostatiques; 3° la phase éther.

Remarquons encore qu'une phase substantielle déterminée ne peut avoir d'action que sur la phase immédiatement supérieure ou inférieure. Si une phase intermédiaire est absente, toute communication est interrompue entre les phases supérieures et inférieures. Et cela pour une raison analogue à celle qui empêche l'induction électro-magnétique de se produire entre deux conducteurs placés normalement les uns aux autres.

Adoptons maintenant cette hypothèse, qu'au lieu des trois phases substantielles que nous avons été obligé de considérer pour édifier le monde physique, il puisse en exister un nombre plus grand.

Appelons état *supraéther* celui qui correspond au phénomène de la vie. Nous devrons retrouver dans cette phase de la substance les caractères que nous trouvons dans les phases inférieures, c'est-à-dire *deux polarités* et des phénomènes attractifs et répulsifs, la *polarité* se traduisant alors dans le mode physiologique par le mot *sexualité.*

Si un observateur non prévenu voyait deux êtres de sexes différents se diriger l'un vers l'autre, il dirait que ces deux êtres *s'attirent*, et il aurait raison, et cela à tel point qu'en observant de plus près il pourrait même retrouver dans ce *mode* la loi de l'asymétrie des pôles que nous avons constatée dans l'électro-statique, les actions réciproques relatives au mâle et à la femelle n'étant pas égales.

Si nous nous élevons encore dans l'échelle des *phases*, nous en trouverons de plus raffinés encore, qui ne se rencontrent que chez l'homme et parfois chez les espèces supérieures : elles correspondent à l'*amour*.

L'homme ou la femme peuvent éprouver l'un pour l'autre de l'amour, de même que le chien peut éprouver de l'amour pour son maître. Ce mode d'attachement est caractérisé par le sentiment d'exclusivisme ou de jalousie, il ne peut s'établir qu'entre êtres *différents*, ce qui implique la *polarité*, mais il est indépendant, contrairement à un préjugé généralement admis, de la sexualité. Bien que ces deux phénomènes se superposent généralement lorsqu'il s'agit d'êtres appartenant à la même espèce et à des sexes différents ; il est curieux de remarquer que le chien n'éprouve de l'amour que pour l'homme, il ne paraît éprouver que la tendance sexuelle lorsqu'il s'agit de son espèce.

L'homme éprouve fréquemment le phénomène sexuel sans amour, et il existe même des sujets chez lesquels ce dernier sentiment paraît ne pas exister ; il est généralement plus développé chez la femme que chez l'homme, à l'inverse du sentiment sexuel. L'*asymétrie polaire* semble donc ici renversée, le rôle positif ou mâle est ici dévolu à la femme. D'autre part, si à certains égards nous pouvons considérer ce dernier sentiment avec une certaine vénération, il est assez probable que c'est son existence qui détermine dans notre espèce ce que Metchnikoff appelle avec raison les *désharmonies* qui n'existent pas dans les espèces inférieures.

La polarité psychologique entraîne la polarité physiologique au delà du terme qui lui serait normalement dévolu si la première n'avait pas existé, de même que dans les espèces inférieures.

L'*amitié* trouve plutôt son analogue dans la solubilité, qui s'établit de préférence entre substances analogues.

Les phénomènes sexuel et de l'amour que nous venons d'indiquer sont fondamentaux, car ils président à la loi des attractions et répulsions polaires des phases qui y correspondent.

Nous voyons également que si un mode substantiel se trouve étroitement lié à tous les modes immédiatement inférieurs, il ne doit pas nécessairement en être ainsi. La phase *vie*, par exemple, de même que la phase *éther*, peut exister en dehors de la matière,

n'y est pas nécessairement unie et y conserve ses *actions réciproques*, que l'on désigne dans cette phase sous le nom de *sentiments* ou de *tendances*.

Tout le monde sait jusqu'à quel point notre *moral* agit sur notre état de santé, sur notre *matière vivante*. Des expériences entreprises tout dernièrement montrent que la résistance électrique de notre corps varie avec notre état d'âme. La perturbation produite en nous sur la phase vie ou supravitale par une peine, se traduit par une perturbation de la supramatière, c'est-à-dire par des ocillations de la résistance électrique. Ces substances d'ordres différents ont donc réagi l'une sur l'autre, ainsi que le feraient une série de chaînons liés les uns aux autres. La transmission peut du reste, comme on le sait, se faire en sens inverse.

L'idée qui consiste à admettre que les phénomènes psychiques sont caractérisés par l'absence de possibilité d'une mesure est fausse, et l'on peut entrevoir la possibilité de la mesure d'une *peine* ou d'une *joie*. Si, en effet, ces manifestations influent sur la conductibilité électrique du corps, celle-ci peut permettre la détermination de ces grandeurs au même titre qu'elle peut permettre la mesure d'une température. Il eût, du reste, pu paraître étrange à un ancien philosophe si on lui avait dit que l'on mesurerait le chaud et le froid. Une grandeur physique se mesure par les effets qu'elle produit, et il en est de même des grandeurs psychiques ou physiologiques.

Nous pouvons donc concevoir des phases substantielles moins énergétiques que la matière et incapables d'entrer en rapport avec cette dernière (phases désignées vulgairement sous le nom d'*esprits*).

De même, il est possible de concevoir des milieux *méta-matériels* plus énergétiques que la matière, que cette dernière ne pourrait pas percevoir si un des chaînons intermédiaires vient à faire défaut.

Il est certainement curieux de remarquer que les anciens philosophes hindous aient eu une pareille conception des choses. Chaque groupe substantiel est désigné sous le nom de *tattva*.

Il existerait sept *tattvas*, et chaque *tattva* impliquerait lui-même sept substances différentes. L'existence humaine comporterait cinq *tattvas;* deux *tattvas*, correspondant à des êtres bien supérieurs à nous, existeraient encore.

L'intervention du nombre sept nous indique la grande part que l'imagination a prise à cette conception ; il n'aurait pu en être autrement, mais, indépendamment de ce détail, nous estimons que la base de philosophie est profondément juste.

Si nous nous plaçons à un point de vue un peu différent, nous voyons encore la reproduction des mêmes phénomènes dans des *phases* différentes. Lorsqu'un courant traverse un électrolyte, il tend à le dématérialiser; aux premiers moments, les choses se passent sans difficulté, mais apparaît ensuite le phénomène de la *polarisation*, qui s'oppose à l'intrusion du courant, elle tend à *préserver l'électrolyte.*

Dans la phase suivante, qui préside au phénomène de la vie, aux phénomènes *physiologiques*, nous constatons le même phénomène, l'*adaptation au milieu.* Tel poison qui agissait puissamment voit ses effets diminuer et même disparaître avec le temps.

Dans la phase substantielle *psychologique* ou *supravitale*, ce phénomène prend alors le nom de *volonté.* Lorsque l'être pensant est pris au dépourvu, entraîné par la *passion* qui joue ici le rôle du *courant*, il ne tarde pas à subir des détériorations qui se transmettent aux *tattvas* immédiatement inférieurs. Mais si l'être est bien organisé, il se *polarise*, résiste à la passion et se préserve. S'il est mal organisé, il est condamné à périr.

La *polarisation électrolytique*, l'*adaptation au milieu* et la *volonté* sont donc des manifestations équivalentes qui se produisent dans des phases substantielles différentes.

Si l'on se place au point de vue physiologique, nous pouvons concevoir notre être comme étant parcouru par des courants développés dans la phase vie. Ces courants se transmettent par le système nerveux.

Le cerveau se comporterait comme le régulateur de ces courants, qui sont eux-mêmes influencés par la substance psychique immédiatement supérieure et réciproquement.

Le courant se développe d'une manière analogue dans les différentes phases de l'évolution de la substance, il peut se propager d'une manière continue ou d'une manière oscillante, de manière à développer toute la série des oscillations.

Lorsque dans le *tattva* correspondant à la *phase physiologique* le courant s'établit, le courant continu correspond à l'absence de sensation, à la léthargie; si, au contraire, nous déterminons des vibrations, la sensation apparaît avec toute la série de ses différences, de ses *nuances*, dont le développement correspond à un véritable *spectre*, que nous appellerons *spectre physiologique.*

La *vie* dans une phase substantielle différente peut se comparer au *calorifique;* ce dernier peut être considéré comme existant à l'état latent pour un corps que l'on suppose sans chaleur; les ions existent à l'état de gyration mais ne vibrent pas (nous avons vu que l'énergie existait mais ne pouvait se transmettre), mais il suffit, pour le voir apparaître, d'exposer ce corps à une radiation qui fera vibrer ceux-ci et communiquera pour ainsi dire au corps la *vie calorifique.*

De même, des graines conservées pendant des siècles (on en a trouvé dans les tombes égyptiennes) possèdent la *phase vie* à l'état latent, mais il suffit de lui communiquer la vibration destinée à la manifester, à l'aide de l'élément colloïdal que nous avons étudié, afin de voir apparaître la germination ou la *vie apparente,* la vibration de la *phase éther* se communiquant à la *phase vie,* qui appartient à un stade supérieur.

Ainsi que nous l'avons vu dans le domaine physique, certaines oscillations (les courtes) produisent la dématérialisation, d'autres, plus longues, amènent la matérialisation.

Nous retrouverons de même en physiologie les actions inverses qui correspondent ici à la *jouissance* et à la *douleur.*

Les jouissances et les douleurs physiologiques produisent, du reste, des impressions très différentes, qui varient avec la longueur d'onde et, vraisemblablement, avec les harmoniques qui s'y superposent.

Si nous considérons le *tattva* qui correspond à l'ordre psycho-

logique, nous n'avons qu'à répéter les mêmes considérations. Tout le monde sait jusqu'à quel point les diverses parties du *spectre psychologique* produisent des sensations différentes.

La douleur produite par la perte d'une somme d'argent et par la perte d'une personne aimée, n'est pas du tout la même. Ce n'est pas la même longueur d'onde.

Il est aisé maintenant de *concevoir* la possibilité d'une série de phénomènes auxquels on donne le nom de surnaturels parce qu'on ne les *conçoit* pas (je ne dis pas *comprendre*, mot qui implique une connaissance plus approfondie).

Nous n'en sommes pas à l'*explication*, mais à la *conception* de phénomènes qui paraissent étranges, la télépathie, par exemple, ou télégraphie sans fil, dans le milieu correspondant au *tattva psychologique*.

Apparitions au moment de la mort, ou même du vivant de la personne.

Les fibres gyrostatiques correspondant aux tattvas psychologique et même physiologique conservent leur forme. Si ces tattvas, étant isolés, parviennent à réagir sur ceux qui lui sont inférieurs, l'enveloppe produite permettra la vision de l'être avec sa forme habituelle.

On dit que la *sensation* peut être *physique* ou *morale*. Que l'on ait affaire à la première ou à la seconde, elle ne peut avoir de réalité que grâce à l'existence du *tattva vie*, de même que la *lumière* ne peut se produire que grâce à l'existence du *tattva éther*. L'intensité de la sensation, de même que l'intensité de la lumière, se traduit par l'intensité du mouvement vibratoire; elle sera agréable si les vibrations sont longues, pénible si elles sont courtes.

Les sensations physiques et morales sont, sous ce rapport, identiques, mais l'ordre du processus dans la série des *tattvas* est inverse.

Dans la sensation *physique* le *tattva matière* éprouve une variation physique ou chimique, perturbation qui s'*induit* du dehors au dedans en suivant la série des tattvas ascendants, et se communique finalement au tattva vie. Dans la sensation morale,

la perturbation se produit d'abord dans le tattva vie et, inversement, par inductions successives, peut se transmettre au tattva matière (on dit vulgairement le moral influe sur le physique).

Les vibrations dans le tattva vie se transmettent par un mécanisme comparable à celui des vibrations lumineuses dans le tattva éther, mais elles sont relativement beaucoup plus lentes. Il faut un temps appréciable, une fraction de seconde, pour qu'une perturbation du mouvement vibratoire dans le tattva vie se transmette au cerveau, lequel semble être le siège d'un tattva d'un ordre plus élevé encore.

Chaque phase ou tattva ne peut percevoir les autres tattvas que pour autant qu'il n'y ait pas de discontinuité dans la chaîne des phases, ainsi que nous l'avons dit; sinon toute perception disparaît. La phase psychologique peut fort bien ne pas percevoir la phase matière si cet état de choses existe, ce qui se traduit dans la philosophie hindoue en disant que *l'esprit peut ne pas percevoir la matière.*

Concluons donc que c'est la *substance* qui correspond vraisemblablement à l'idée que l'on se fait de la *divinité* qui, en s'assimilant l'énergie à différents degrés, détermine la succession des phases substantielles perceptibles ou non perceptibles qui constituent l'univers. Tel est le sens que l'on devrait attribuer au mot *création*, lequel pourrait se traduire par : *évolution de l'énergie constante et indestructible dans la substance immuable et éternelle.*

Ce qu'il nous sera toujours impossible de connaître, c'est la nature de cette *substance*, et c'est là que s'arrête le savoir humain. Mais, quoi qu'il en soit, nous remarquerons que nous voilà bien loin de la conception des *fluides* jusqu'à présent chers aux physiciens.

La grande loi du *transformisme* n'est pas seulement l'apanage des êtres vivants, elle régit toutes choses, tant la nature *dite* animée que la nature *dite* inanimée, tant les espèces chimiques que les espèces animales.

C'est la perpétuelle évolution des choses dans le cycle éternel de la nature.

CONCLUSION

Ainsi qu'on le voit, nous retrouvons dans les différentes phases substantielles des mécanismes analogues; cependant il n'y a pas d'identité et il existe probablement autant de mécaniques qu'il existe de phases. La variation de l'attraction avec la distance existe dans la phase matière. Dans la phase psychique, nous remarquons que l'*attraction* qui se traduit par le mot « amour » cesse d'être fonction de cette distance, de même dans la phase supramatérielle la masse devient fonction de la vitesse.

Cette remarque est importante, car il ne faut pas prétendre ramener dans les théories physiques les principes qui gouvernent les diverses *phases* à une seule et même mécanique, celle qui gouverne la matière, alors que ce sont précisément ces principes qu'il faudra déterminer à posteriori.

Il faudra donc bien se garder de rejeter immédiatement une théorie pour le seul motif qu'elle comporte des conclusions qui se trouvent en contradiction avec la *mécanique matière*, mais il faudra plutôt rechercher quels sont les principes des mécaniques qui gouvernent les diverses phases substantielles. En réalité je dois dire qu'une pensée analogue a déjà été admise par plusieurs physiciens.

Rappelons que les phénomènes physiques seuls comportent déjà la superposition de trois phases.

C'est seulement en permettant à la pensée d'élargir ainsi son domaine, qu'il sera possible de *classer* et de *prévoir* des faits qui auraient à tout jamais échappé à notre compréhension.

S'il nous était possible d'établir une mécanique transcendante embrassant toutes les phases substantielles, la *mécanique matière* nous apparaîtrait comme cas particulier de cette mécanique générale, de même qu'un théorème de géométrie dans l'espace à trois dimensions, apparaît comme cas particulier d'une géométrie portant sur un nombre quelconque de dimensions.

Je ne pense donc nullement que les difficultés soulevées par la conception de l'éther gyrostatique émise la première fois par lord Kelvin et admise par Larmor soient insurmontables, et l'on ne saurait assez appeler l'attention sur les belles recherches de M. Weyher, sur les tourbillons. Si la théorie corpusculaire actuellement en honneur peut, dans certains cas, être considérée comme équivalente à la vérité et permet même de découvrir des faits nouveaux, ainsi que le montrent les admirables recherches de Lorentz, je pense également qu'elle devra laisser dans l'ombre bon nombre de faits sur lesquels nous avons appelé particulièrement l'attention et dont plusieurs ont été découverts grâce à notre conception.

Mais seulement qu'on n'aille pas s'imaginer qu'une théorie physique naît de toutes pièces sans donner prise à aucune difficulté. L'histoire des sciences est là pour nous fournir des enseignements précieux; la théorie des ondulations a vu son succès retardé de cent ans par cela qu'elle semblait incompatible avec l'ombre géométrique, de même la théorie cinétique des gaz est valide, mais elle a donné prise à des objections parce qu'elle est incomplète. Ce qui doit, avant tout, décider de la *validité* d'une théorie se trouve dans sa faculté de classement des faits connus et de prévision de ceux qui ne le sont pas, ainsi que nous l'avons dit.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Pages.

Réflexions préliminaires 3

Notions préliminaires 10

Action d'influence. — Induction électrostatique.

CHAPITRE Ier

État chaotique et supramatériel 17

Instabilité de la matière. — L'état chaotique ou nébulaire. — Formation de l'ion. — Formation de la chaîne ionique et du courant électrique. — Phosphorescence. — État supragazeux. — Formation de la nébuleuse spirale et les deux causes de sa rotation. — Démonstrations expérimentales de ces actions mécaniques. — Cause probable de l'odeur. — Corollaire. — Décharge électrique de surfaces par le mouvement ionique.

CHAPITRE II

L'état gazeux 29

Formation de l'atome. — Pression interne et la force expansive des gaz. — La vibration ionique considérée : 1° comme étant la cause de la dilatation ; 2° comme étant la cause de l'*embrayage* qui permet la transmission de l'énergie gyrostatique. — Notion du zéro absolu, ou d'une température limite irréalisable à laquelle l'énergie du système ne se transmettrait plus, serait constante. — Réaction chimique. — Action catalytique. — Loi de Dulong. — Aptitude réactionnelle. — Valence. — Formules de structure. — Pression exercée

Pages.

par les gaz renfermant le même nombre de molécules. — Raies spectrales. — Cause de la stabilité apparente de l'atome. — Fausseté de la conception du point matériel. — Phénomène de Zeeman. — Remaniement à apporter à la théorie cinétique des gaz. — Induction électro-magnétique du calorique dans les substances iodynamiques et aniodynamiques. — Magnétisme et diamagnétisme. — Interprétation du radiomètre.

CHAPITRE III

État liquide 48

Texture fibreuse des gaz et des liquides. — Vapeur saturée. — État critique. — Tension superficielle. — Effets thermiques dus à la détente et à la compression. — Variation de volume de la fibre molécule, par suite d'une variation de température. — Des solutions. — Pression osmotique. — Électrolytes. — Substances ionisées et iodynamisées. — Réactions exothermiques et endothermiques. — Hydrates — Électrolyse. — Asymétrie des pôles. — Effets produits par les projections cathodiques et anodiques. — Électrodes attaquables. — Courant athermique, courant thermique, courant électrolytique. — Phénomènes analogues dans les gaz raréfiés. — État particulaire. — Action de l'état particulaire sur la végétation. — Plantes bipôles. — Rosée. — Origine de l'électricité atmosphérique. — Des orages. — Des aurores polaires.

CHAPITRE IV

L'état solide 72

Considérations générales. — Rapport entre la conductibilité électrique et la conductibilité calorifique. — Influence de la pression sur la conductibilité calorifique. — Rapport entre les conductibilités calorifique ou électrique et le coefficient de dilatation. — Dureté et fragilité. — Magnétisme. — L'analogie et la différence qui existe entre un corps magnétique soumis à l'action de l'aimant et un conducteur soumis à l'influence. — Courants thermo-électriques. — Phénomène de Hall. — Phosphorescence, genèse et destruction de l'atome.

CHAPITRE V

La destruction et la fin de la matière 93

Considérations générales. — L'explosif matière. — Divers procédés de dématérialisation. — Le zéro absolu.

CHAPITRE VI

Pages.

Conception de la masse et de l'attraction newtonienne . . 104

Aux trois phases substantielles physiques correspondent trois modes d'attraction. — Influence de l'orientation sur la grandeur « masse ». Raison pour laquelle on a été amené à la conception de corpuscules positifs gros. — Raison de l'asymétrie des pôles. — Géotropisme des plantes.

APPENDICE PHILOSOPHIQUE

Examen des phénomènes analogues que l'on retrouve dans des phases substantielles différentes de celles du monde *dit physique* . . 107

DE L'INFLUENCE

D'UN

CONTACT ORDINAIRE OU STATIONNAIRE

DE DEUX SURFACES

SUR

LA DÉVELOPPABLE CIRCONSCRITE A CES DEUX SURFACES

PAR

W.-A. VERSLUYS

DE L'INFLUENCE

D'UN

CONTACT ORDINAIRE OU STATIONNAIRE

DE DEUX SURFACES

SUR

LA DÉVELOPPABLE CIRCONSCRITE A CES DEUX SURFACES

1. Soient U et V deux surfaces algébriques quelconques, ayant au point commun O un plan tangent commun π. Soient U′ et V′ les figures polaires réciproques des surfaces U et V. Le plan o, qui est le transformé par polaire réciproque du point O, sera un plan tangent des deux surfaces U′ et V′ en un point commun P, qui est le transformé du plan π. D'après Salmon (*), le point P est un point double de la courbe d'intersection d des deux surfaces U′ et V′, et les deux tangentes à la courbe d au point P se trouvent dans le plan o. La courbe d est la figure polaire réciproque de la développable D circonscrite aux surfaces U et V. Le plan π est donc un plan double de la développable D, et les deux génératrices l_1 et l_2, le long desquelles le plan π est tangent à la développable D, passent par le point O.

Je me propose de déterminer l'équation des génératrices l_1 et l_2

(*) Salmon, *Geometry of three dimensions*, § 203.

et d'en déduire les conditions sous lesquelles coïncident ces génératrices.

2. Chacune des génératrices l_1 et l_2 est l'intersection du plan tangent commun π avec un plan tangent consécutif commun aux surfaces U et V.

Soient

$$0 = z + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gxz + 2fyz + cz^2 + dx^3 + 3ex^2y + 3kxy^2 + my^3 + \text{etc.},$$
$$0 = z + a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'xz + 2f'yz + c'z^2 + d'x^3 + 3e'x^2y + 3k'xy^2 + m'y^3 + \text{etc.},$$

les équations des surfaces U et V. Un plan tangent à la surface U en un point infiniment voisin du point commun O (o, o, o) a pour équation

$$z + 2(ax_1 + hy_1)x + 2(hx_1 + by_1) = 0 \text{ (*)}, \qquad \text{(A)}$$

où les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point de contact satisfont à l'équation

$$0 = z_1 + ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2, \qquad \text{(B)}$$

laquelle exprime, en négligeant des infiniment petits d'ordres trois ou supérieur, que le point de contact se trouve sur la surface U.

De même

$$z + 2(a'X_1 + h'Y_1)x + 2(h'X_1 + b'Y_1)y = 0 \qquad \text{(C)}$$

est l'équation d'un plan tangent à la surface V, infiniment voisin du plan π ou $z = 0$, avec la condition

$$0 = Z_1 + a'X_1^2 + 2h'X_1Y_1 + b'Y_1^2. \qquad \text{(D)}$$

Les deux plans tangents (B) et (C) coïncident si l'on a

$$ax_1 + hy_1 = a'X_1 + h'Y_1,$$
$$hx_1 + by_1 = h'X_1 + b'Y_1. \qquad \text{(E)}$$

(*) Salmon, *loc. cit.*, § 268.

En choisissant pour x_1 et y_1 des infiniment petits du premier ordre, mais du reste quelconques, les équations (E) déterminent complètement les valeurs X_1 et Y_1. Les équations (B) et (D) serviront alors à déterminer les valeurs de z_1 et Z_1, et les équations (A) et (C) représenteront un même plan tangent aux surfaces U et V aux points (x_1, y_1, z_1) et (X_1, Y_1, Z_1). En ne tenant compte dans les équations des plans tangents que des infiniment petits du premier ordre, on trouve donc une infinité de plans tangents communs infiniment voisins du plan π. On ne peut donc pas déterminer le plan tangent commun des surfaces U et V, infiniment voisin du plan π, en ne tenant compte que des infiniment petits du premier ordre.

3. En négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur au second et en tenant compte de ce que la variable z d'un point situé dans le plan tangent est infiniment petite par rapport aux variables x et y, on obtient pour les équations des plans tangents aux points (x_1, y_1, z_1) et (X_1, Y_1, Z_1)

$$\begin{aligned} &x\{2ax_1 + 2hy_1 + 2gz_1 + 3dx_1^2 + 6ex_1y_1 + 3ky_1^2\} \\ &+ y\{2hx_1 + 2by_1 + 2fz_1 + 3ex_1^2 + 6kx_1y_1 + 3my_1^2\} \qquad (A') \\ &+ z\{1 + 2gx_1 + 2fy_1\} = z_1 + 2ax_1^2 + 4hx_1y_1 + 2by_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x\{2a'X_1 + 2h'Y_1 + 2g'Z_1 + 3d'X_1^2 + 6e'X_1Y_1 + 3k'Y_1^2\} \\ &+ y\{2h'X_1 + 2b'Y_1 + 2f'Z_1 + 3e'X_1^2 + 6k'X_1Y_1 + 3m'Y_1^2\} \qquad (C') \\ &+ z\{1 + 2g'X_1 + 2f'Y_1\} = Z_1 + 2a'X_1^2 + 4h'X_1Y_1 + 2b'Y_1^2. \end{aligned}$$

Les équations (A') et (C') devant représenter le même plan, les coefficients de ces deux équations seront proportionnels ; x_1, y_1, X_1, Y_1 étant des infiniment petits, on pourra poser

$$\frac{1 + 2gx_1 + 2fy_1}{1 + 2g'X_1 + 2f'Y_1} = 1 + v,$$

où v représente un infiniment petit du premier ordre.

On aura donc

$$\frac{2ax_1 + 2hy_1 + 2gz_1 + 3dx_1^2 + 6ex_1y_1 + 3ky_1^2}{2a'X_1 + 2h'Y_1 + 2g'Z_1 + 3d'X_1^2 + 6e'X_1Y_1 + 3k'Y_1^2} = 1 + v.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par le dénominateur et en égalant les termes qui contiennent des infiniment petits du même ordre, on obtient les équations

$$\begin{gathered} ax_1 + hy_1 = a'X_1 + h'Y_1, \\ 2gz_1 + 3dx_1^2 + 6ex_1y_1 + 3ky_1^2 = 2g'Z_1 + 3d'X_1^2 + 6e'X_1Y_1 \quad (E') \\ + 3k'Y_1^2 + 2v(a'X_1 + h'Y_1). \end{gathered}$$

De même, par les coefficients des y, on obtient les équations

$$\begin{gathered} hx_1 + by_1 = h'X_1 + b'Y_1, \\ 2fz_1 + 3ex_1^2 + 6kx_1y_1 + 3my_1^2 = 2f'Z_1 + 3e'X_1^2 + 6k'X_1Y_1 \quad (E'') \\ + 3m'Y_1^2 + 2v(h'X_1 + b'Y_1). \end{gathered}$$

Les coefficients des z donnent l'équation

$$2gx_1 + 2fy_1 = 2g'X_1 + 2f'Y_1 + v,$$

tandis que les termes connus donnent

$$z_1 + 2ax_1^2 + 4hx_1y_1 + 2by_1^2 = Z_1 + 2a'X_1^2 + 4h'X_1Y_1 + 2b'Y_1^2. \quad (F)$$

D'après les équations (B) et (D), l'équation (F) donne le résultat

$$z_1 = Z_1.$$

L'équation (F) se réduit alors à la suivante :

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 = a'X_1^2 + 2h'X_1Y_1 + b'Y_1^2. \quad (G)$$

Les variables x_1, y_1, X_1, Y_1 doivent donc satisfaire aux conditions (G) et

$$\begin{aligned} ax_1 + hy_1 &= a'X_1 + h'Y_1, \\ hx_1 + by_1 &= h'X_1 + b'Y_1. \end{aligned} \quad (H)$$

4. Si les coordonnées x_1, y_1, z_1, X_1, Y_1, Z_1 satisfont aux conditions (B), (D), (E'), (E''), (F) et (G), les équations (A') et (C') représentent un même plan tangent aux surfaces U et V et infiniment voisin du plan tangent commun π ou $z = 0$. La droite d'intersection du plan $z = 0$ avec le plan (A') ou (C') est donc une génératrice l de la développable D circonscrite aux surfaces U et V. En négligeant des termes infiniment petits d'ordre supérieur, les équations de la génératrice l seront

$$z = 0 \qquad (ax_1 + hy_1)x + (hx_1 + by_1)y = 0$$

ou

$$z = 0 \qquad (a'X_1 + h'Y_1)x + (h'X_1 + b'Y_1)y = 0.$$

En posant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{ax_1 + hy_1}{hx_1 + by_1} = \frac{a'X_1 + h'Y_1}{h'X_1 + b'Y_1}, \qquad \text{(L)}$$

les équations de la génératrice l seront

$$z = 0 \qquad \lambda x + y = 0.$$

L'équation (G) se réduit, d'après les équations (L), à la suivante :

$$(\lambda x_1 + y_1)(hx_1 + by_1) = (\lambda X_1 + Y_1)(h'X_1 + b'Y_1),$$

d'où l'on déduit par la première équation (H),

$$\lambda x_1 + y_1 = \lambda X_1 + Y_1.$$

Les équations (G), (H) et (L) se réduisent donc aux suivantes :

$$\begin{aligned}
&\lambda x_1 + y_1 - \lambda X_1 - Y_1 = 0,\\
&ax_1 + hy_1 - a'X_1 - h'Y_1 = 0,\\
&hx_1 + by_1 - h'X_1 - b'Y_1 = 0,\\
&(a - \lambda h)x_1 + (h - \lambda b)y_1 = 0.
\end{aligned}$$

En éliminant x_1, y_1, X_1, Y_1, on obtient, pour déterminer λ, l'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ a & h & -a' & -h' \\ h & b & -h' & -b' \\ a-\lambda h & h-\lambda b & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} a-a' & h-h' & a'-\lambda h' \\ h-h' & b-b' & h'-\lambda b' \\ a-\lambda h & h-\lambda b & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on obtient

$$\lambda^2\{b(a'b'-h'^2)-b'(ab-h^2)\}-2\lambda\{h(a'b'-h'^2)-h'(ab-h^2)\} + \{a(a'b'-h'^2)-a'(ab-h^2)\}=0. \quad (I)$$

ou bien

$$(a'b'-h'^2)(b\lambda^2-2h\lambda+a)-(ab-h^2)(b'\lambda^2-2h'\lambda+a')=0. \quad (I')$$

5. L'équation (I) étant du second degré en λ, le plan $z=0$ est tangent à la développable D le long de deux génératrices l_1 et l_2, ce qui vérifie que le plan π ou $z=0$ est un plan double de la développable D.

On trouve l'équation des génératrices l_1 et l_2 en substituant dans l'équation (I') la valeur

$$\lambda=-\frac{y}{x},$$

ce qui donne le résultat

$$(a'b'-h'^2)(ax^2+2hxy+by^2) - (ab-h^2)(a'x^2+2h'xy+by^2)=0. \quad (J)$$

Les génératrices l_1 et l_2 sont donc un couple de l'involution déterminée par les deux couples

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$
$$a'x^2+2h'xy+b'y^2=0,$$

qui sont les couples d'asymptotes des indicatrices des surfaces U et V relatives au point O, ou bien qui sont les couples de tangentes principales (Haupttangenten, inflexional tangents).

Les deux génératrices l_1 et l_2 coïncident si les racines de l'équation en λ (I) deviennent égales. La condition correspondante est

$$\{h(a'b' - h'^2) - h'(ab - h^2)\}^2 = \{a(a'b' - h'^2) - a'(ab - h^2)\} \times \{b(a'b' - h'^2) - b'(ab - h^2)\}.$$

Cette condition se réduit à

$$(ab - h^2)(a'b' - h'^2)\{(h - h')^2 - (a - a')(b - b')\} = 0.$$

Par conséquent, les génératrices l_1 et l_2 coïncident si l'on trouve satisfaites une ou plusieurs des conditions

$$\begin{aligned} (h - h')^2 &= (a - a')(b - b'), \\ h^2 &= ab, \\ h'^2 &= a'b'. \end{aligned} \qquad (K)$$

La première condition exprime que les surfaces U et V ont au point O un contact stationnaire (*); les deux dernières expriment que le point O est un point parabolique sur la surface U ou sur la surface V.

On peut donc énoncer le théorème :

Si deux surfaces algébriques U *et* V *ont au point* O *un contact ordinaire, et si le point* O *n'est pas un point parabolique sur une des deux surfaces, le plan tangent commun au point* O *est un plan double ordinaire de la développable circonscrite aux surfaces* U *et* V.

Il faut exclure le cas où le point O est un point parabolique, puisqu'en un tel point le plan tangent est un plan tangent double, les points de contact étant deux points consécutifs. Il va de soi qu'il faut également exclure le cas où le plan π est un plan tan-

(*) Salmon, *loc. cit.*, § 204.

gent double ordinaire d'une des deux surfaces U et V. Si le plan π est encore tangent à la surface U en un point Q à distance finie, la droite OQ est une troisième génératrice le long de laquelle le plan π est tangent à la développable D (voir § 7). La méthode employée pour déterminer les génératrices de la développable D situées dans le plan π, n'a pu donner la génératrice OQ, puisque on a supposé que les coordonnées des points de contact du plan tangent infiniment voisin du plan π étaient des infiniment petits, ce qui n'est pas vrai pour les coordonnées du point de contact qui se trouve dans le voisinage du point Q.

6. Supposons

$$(h - h')^2 = (a - a')(b - b');$$

les deux surfaces U et V ont au point O un contact stationnaire et les deux génératrices l_1 et l_2 coïncident. Supposons encore

$$h^2 \gtrless ab, \qquad h'^2 \gtrless a'b';$$

le point O n'est donc pas un point parabolique d'une des surfaces U ou V. Le point P et le plan o seront un point et un plan tangent non singulier de chacune des surfaces U′ et V′ (voir § 1). Le point P est un point double de la courbe d'intersection d des surfaces U′ et V′. Les tangentes à la courbe d au point P sont les transformées par polaires réciproques des génératrices l_1 et l_2. Ces génératrices l_1 et l_2 coïncident; par conséquent, il en sera de même des tangentes à la courbe d au point P. Le point P est donc un point stationnaire de la courbe d; par conséquent, le plan π est un plan stationnaire de la développable D, qui est la figure polaire réciproque de la courbe d'intersection d.

On peut donc énoncer le théorème :

Si les surfaces U *et* V *ont au point* O *un contact stationnaire et si le point* O *n'est pas un point parabolique d'une des surfaces* U *et* V, *le plan tangent commun au point* O *est un plan stationnaire de la développable circonscrite aux surfaces* U *et* V.

Ce théorème se vérifie facilement si les surfaces U et V sont

du second degré. La condition qui exprime que les surfaces U^2 et V^2 ont un contact stationnaire est que l'équation $\Delta(\lambda) = 0$ possède une racine triple (*). Soient λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les quatre racines; supposons $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$. Pour que la développable circonscrite aux deux surfaces U^2 et V^2 possède un plan stationnaire, il faut qu'une équation $D(\mu) = 0$ possède une racine triple (**). Entre les racines λ et μ, on a les relations

$$\mu_1 = \lambda_2\lambda_3\lambda_4, \quad \mu_2 = \lambda_3\lambda_4\lambda_1, \quad \mu_3 = \lambda_4\lambda_1\lambda_2, \quad \mu_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \text{ (***)}.$$

Si donc on a $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, on aura nécessairement $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, et la développable circonscrite possédera un plan stationnaire. Le plan commun des surfaces U^2 et V^2 au point de contact étant un plan double de la développable circonscrite, et cette développable ne pouvant posséder deux plans doubles sans se décomposer, il faut que ce plan de contact en soit le plan stationnaire.

7. Supposons

$$h^2 = ab,$$
$$h'^2 \gtrless ab,$$
$$(h - h')^2 \gtrless (a - a')(b - b').$$

Le point O est un point parabolique de la surface U et un point non parabolique de la surface V, tandis que les deux surfaces ont au point O un contact ordinaire. L'équation (J) des génératrices l_1 et l_2 se réduit à

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,$$

ou

$$(x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b})^2 = 0.$$

Les deux génératrices l_1 et l_2 coïncident donc avec la seule tangente principale (Haupttangente) t au point O de la surface U. Ce résultat était à prévoir, puisque tous les plans tangents à la sur-

(*) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, t. II, p. 219.
(**) Id., *loc. cit.*, p. 261.
(***) Id., *loc. cit.*, p. 253.

face U infiniment voisins du plan π ou $z = 0$ passent par la tangente t (*). Par conséquent aussi les plans tangents infiniment voisins, qui sont à la fois tangents à la surface V, passent par la tangente t, ou bien les génératrices l_1 et l_2 coïncident avec la tangente t.

Le plan π n'est pas un plan stationnaire ordinaire de la développable D. En effet, le point P, qui est le transformé par polaires réciproques du plan π, est un point ordinaire de la surface V', mais un point de la courbe cuspidale de la surface U', tandis que le plan o est au point P le plan tangent commun de la surface V' et des deux nappes de la surface U'. On voit facilement que tout plan passant par le point P y rencontre trois fois la courbe d'intersection d des surfaces U' et V'; le point P est donc un point triple de la courbe d. La tangente principale t se transforme en la tangente t' au point P à la courbe cuspidale. On trouve facilement que cette droite t' a de commun au point P quatre points consécutifs avec la courbe d, et cette droite t' est la seule qui jouisse de cette propriété. Le plan tangent o rencontre au point P la courbe d en six points consécutifs. Le point P est donc de la courbe d un point singulier de l'ordre 3, du rang 1 et de la classe 2 (**). Le plan π est donc un plan triple de la développable circonscrite D; par la génératrice t, il passe quatre plans consécutifs, et par le point O, il passe six plans consécutifs de la développable D. En d'autres termes, O est un point singulier de l'arête de rebroussement de la développable D. Ce point O est sur cette arête de rebroussement une singularité de l'ordre 2, du rang 1 et de la classe 3. C'est une singularité $\beta + 2\alpha$ qu'on obtient si le plan osculateur d'un point stationnaire se confond avec deux plans stationnaires.

8. Si les coefficients a, b, h, a', b', h' satisfont à deux ou à trois des conditions (K), on trouve, comme au § 7, que le plan π

(*) SALMON, *loc. cit.*, § 269.

(**) HALPHEN, *Bull. de la Soc. Mat. de France*, t. VI, p. 10.

n'est pas un plan stationnaire ordinaire de la développable D. On peut donc énoncer le théorème :

Si deux surfaces algébriques U *et* V *ont en* δ *points un contact ordinaire et en* χ *points un contact stationnaire, les surfaces* U' *et* V', *qui sont les figures polaires réciproques des surfaces* U *et* V, *ont également en* δ *points un contact ordinaire et en* χ *points un contact stationnaire. Les* δ *plans de contact ordinaire sont des plans doubles et les* χ *plans de contact stationnaire sont des plans stationnaires de la développable circonscrite aux surfaces* U *et* V, *à condition que les points et plans de contact soient des points et plans ordinaires des deux surfaces* U *et* V.

Quand une des surfaces U et V est une surface développable, un plan tangent commun étant tangent à la développable le long d'une droite n'est pas un plan tangent ordinaire, et l'on se trouve donc dans un des cas exclus. Du reste, la figure polaire réciproque n'est plus une surface, et il n'existe plus de développable circonscrite.

Les deux génératrices l_1 et l_2 seront des droites réelles et le plan π sera donc un plan double ordinaire si l'on a

$$(ab - h^2)(a'b' - h'^2)\} (h - h')^2 - (a - a')(b - b')\{ > 0.$$

Le plan π *est donc un plan double ordinaire de la développable circonscrite* D :

1° *Si le point* O *est un nœud de la courbe d'intersection* δ *des surfaces* U *et* V *et si le point* O *est un point elliptique sur les deux surfaces ou si le point* O *est un point hyperbolique sur les deux surfaces ;*

2° *Si le point* O *est un point isolé de la courbe d'intersection* δ *et si le point* O *est un point elliptique sur l'une et un point hyperbolique sur l'autre des deux surfaces* U *et* V.

Les deux génératrices l_1 et l_2 seront des droites imaginaires et le plan π sera un plan double isolé si l'on a

$$(ab - h^2)(a'b' - h'^2)\} (h - h')^2 - (a - a')(b - b')\{ < 0.$$

Le plan π *est donc un plan double isolé de la développable circonscrite* D :

1° *Si le point* O *est un point isolé de la courbe d'intersection* δ *et si le point* O *est un point elliptique des deux surfaces ou si le point* O *est un point hyperbolique des deux surfaces;*

2° *Si le point* O *est un nœud de la courbe d'intersection* δ *et si le point* O *est un point elliptique de l'une et un point hyperbolique de l'autre des surfaces* U *et* V.

Delft, mai 1905.

SUR

LE CALCUL NUMÉRIQUE

DE

LA SÉRIE $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 s^2)^{\frac{q}{2}}}$

PAR

W. KAPTEYN

SUR

LE CALCUL NUMERIQUE

DE

LA SÉRIE $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 s^2)^{\frac{q}{2}}}$

1. Dans les pages suivantes, je me propose de faire voir comment on peut calculer la somme de la série

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 s^2)^{\frac{q}{2}}},$$

où α et β représentent des quantités quelconques mais positives et q un nombre entier positif.

En posant $\alpha = \beta \frac{c}{\pi}$, on a

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2 s^2)^{\frac{q}{2}}} = \frac{\pi^q}{\beta^q} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\frac{q}{2}}};$$

par suite, en étudiant la dernière série, nous ne diminuerons pas la généralité de la question proposée.

2. On connaît la somme de la série quand q est un nombre pair.

En effet, en posant $q = 2v + 2$, on a, d'après le calcul des résidus,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+1}} = -\frac{1}{2c^{2v+2}} - \frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{\pi \cot \pi z}{((c^2 + \pi^2 z^2)^{v+1})}$$

$$= -\frac{1}{2c^{2v+2}} - \frac{1}{\pi^{2v+1} v!}\frac{d^v}{dz^v}\left[\frac{\cot \pi z}{\left(z + \frac{ic}{\pi}\right)^{v+1}}\right]_{z=\frac{ic}{\pi}}.$$

Or, d'après la formule de Leibnitz,

$$\frac{d^v}{dz^v}\left[\frac{\cot \pi z}{(z+a)^{v+1}}\right] = (-1)^v \sum_{s=0}^{v} (-1)^s \frac{(2v-s)!}{s!\,(v-s)!}\frac{\dfrac{d^s}{dz^s}\cot \pi z}{(z+a)^{2v+1-s}},$$

par suite

$$\frac{d^v}{dz^v}\left[\frac{\cot \pi z}{(z+a)^{v+1}}\right]_{z=a=\frac{ic}{\pi}}$$

$$= -i\frac{\pi^{2v+1}}{2^{2v+1}c^{2v+1}} \sum_{s=0}^{v} (-i)^s \frac{(2v-s)!}{s!\,(v-s)!}\left(\frac{2c}{\pi}\right)^s \frac{d^s}{dz^s}[\cot \pi z]_{z=\frac{ic}{\pi}}$$

et

$$(1). \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+1}} = -\frac{1}{2c^{2v+2}} + \frac{(2v)!}{2^{2v+1}(v!)^2 c^{2v+1}}\frac{e^{2c}+1}{e^{2c}-1}$$

$$+ i\frac{1}{2^{2v+1} v!\, c^{2v+1}} \sum_{s=1}^{v} (-i)^s \frac{(2v-s)!}{s!\,(v-s)!}\left(\frac{2c}{\pi}\right)^s \frac{d^s}{dz^s}[\cot \pi z]_{z=\frac{ic}{\pi}}.$$

3. Quand $q = 2v + 1$ nous introduirons d'abord l'hypothèse $c < \pi$.

Dans ce cas, la formule du binôme nous permet d'écrire

$$\frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\,\Gamma(v+\frac{1}{2})}\frac{c^{2m}}{\pi^{2m}}\frac{1}{s^{2v+2m+1}},$$

d'où, en posant

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^p} = S_p$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\,\Gamma(v+\frac{1}{2})}\frac{c^{2m}}{\pi^{2m}} S_{2v+2m+1}$$

Si l'on ajoute à cette équation la relation évidente

$$0 = \frac{1}{(c^2 + \pi^2)^{v+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi^{2v+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\Gamma(v + \frac{1}{2})} \frac{c^{2m}}{\pi^{2m}},$$

on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(c^2 + \pi^2)^{v+\frac{1}{2}}} \\ \quad + \dfrac{1}{\pi^{2v+1}} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(v + m + \frac{1}{2})}{m!\Gamma(v + \frac{1}{2})} \frac{c^{2m}}{\pi^{2m}} (S_{2v+2m+1} - 1). \end{array} \right.$$

Cette formule convient très bien pour le calcul de la série proposée, parce qu'on possède pour les quantités S_p (*) des tables qui montrent la convergence très rapide de la série.

Dans la supposition de $c < \pi$, on a :

$$\frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v + \frac{1}{2}) 2^v c^v} \int_0^{\infty} J^v(ct) e^{-\pi st} t^v dt,$$

où $J^v(ct)$ représente la fonction cylindrique de première espèce de rang v (**). On voit donc que

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(v + \frac{1}{2}) 2^v c^v} \int_0^{\infty} \frac{J^v(ct)}{e^{\pi t} - 1} t^v dt$$

d'où résulte que notre série est en rapport intime avec les fonctions cylindriques.

4. Il nous reste à étudier la série proposée, q étant $2v + 1$, quand c est quelconque par rapport à π. Avant d'aborder ce dernier cas, il importe d'étudier une intégrale définie qui nous sera utile plus loin.

(*) LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral*, t. III, p. 65; STIELTJES, *Acta Math.*, t. X, p. 299.

(**) NIELSEN, *Handbuch der Cylinderfunctionen*, p. 106.

Posons

$$(5). \quad \ldots \quad \mathfrak{K}^v(b) = \int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-1} dt$$

où v désigne un nombre entier et b une quantité arbitraire mais positive. Cette intégrale se rencontre déjà dans une étude de Kummer (*). Il trouve

$$\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{\mu-1} dt = \Gamma(\mu)\psi(1-\mu, b^2) + \Gamma(-\mu) b^{2\mu} \psi(1+\mu, b^2)$$

où

$$\psi(q, x) = 1 + \frac{x}{q} + \frac{x^2}{2!q(q+1)} + \frac{x^3}{3!q(q+1)(q+2)} + \cdots$$

μ étant un nombre quelconque mais non entier.

Pour évaluer l'intégrale dans la supposition v entier, on pourrait substituer $\mu = v - \varepsilon$ dans la formule de Kummer et chercher la limite pour $\varepsilon = 0$. Mais il vaut mieux suivre une autre méthode.

Si l'on différentie l'équation (5) par rapport à b, on obtient :

$$-\frac{1}{2b}\frac{d\mathfrak{K}^v}{db} = \int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-2} dt$$

$$-\frac{1}{2b}\frac{d^2\mathfrak{K}^v}{db^2} + \frac{1}{2b^2}\frac{d\mathfrak{K}^v}{db} = -2b\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-3} dt.$$

Or, en intégrant entre les limites 0 et ∞ les deux membres de l'identité

$$t^{v-1} d\left(e^{-t-\frac{b^2}{t}}\right) = -e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-1} dt + b^2 e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-3} dt,$$

on voit que

$$-(v-1)\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-2} dt = -\int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-1} dt + b^2 \int_0^\infty e^{-t-\frac{b^2}{t}} t^{v-3} dt;$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XVII.

par conséquent, on a

$$\frac{v-1}{2b}\frac{d\mathfrak{H}^v}{db} = -\mathfrak{H}^v + b^2\left[\frac{1}{4b^2}\frac{d^2\mathfrak{H}^v}{db^2} - \frac{1}{4b^3}\frac{d\mathfrak{H}^v}{db}\right]$$

ou

$$(4). \quad \ldots \quad \frac{d^2\mathfrak{H}^v}{db^2} - \frac{2v-1}{b}\frac{d\mathfrak{H}^v}{db} - 4\mathfrak{H}^v = 0.$$

L'intégration de cette équation différentielle se déduit aisément de celle de Bessel

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)w = 0$$

en changeant dans celle-ci x en $2ib$ et w en $\frac{\mathfrak{H}^v}{b^v}$.

L'intégrale générale de l'équation (4) prend donc la forme

$$\mathfrak{H}^v(b) = b^v[\mathrm{AJ}^v(2ib) + \mathrm{BY}^v(2ib)]$$

J^v et Y^v représentant les fonctions cylindriques de première et de seconde espèce.

Pour déterminer convenablement les constantes A et B, nous remarquons que l'intégrale (3) remplit les deux conditions suivantes :

$$\mathfrak{H}^v(0) = (v-1)! \qquad \mathfrak{H}^v(\infty) = 0.$$

Or, on sait que

$$\text{pour } b = 0 \qquad b^v\mathrm{J}^v(2ib) \equiv 0$$

$$\text{id.} \qquad b^v\mathrm{Y}^v(2ib) \equiv -(-i)^v\frac{(v-1)!}{\pi}$$

et

$$\text{pour } b = \infty \qquad b^v\mathrm{J}^v(2ib) \equiv \frac{b^v}{2\sqrt{\pi b}}e^{2b+\frac{vi\pi}{2}}$$

$$\text{id.} \qquad b^v\mathrm{Y}^v(2ib) \equiv \frac{b^v}{2\sqrt{\pi b}}e^{2b+\frac{(v+1)i\pi}{2}}$$

d'où résulte

$$\pi = -(-i)^v\mathrm{B}$$

$$0 = \mathrm{A} + \mathrm{B}i$$

et

$$(5). \quad \ldots \quad \mathfrak{H}^v(b) = \pi i^{v+1}b^v[\mathrm{J}^v(2ib) + i\,\mathrm{Y}^v(2ib)].$$

La combinaison $J^v + iY^v$ que l'on rencontre ici est précisément la fonction que M. Nielsen (*) appelle une fonction cylindrique de troisième espèce et qu'il désigne par la notation H_1^v qui rappelle le nom de Hankel.

Avec cette notation, l'intégrale cherchée prend la forme

$$(6). \quad \mathfrak{G}^v(b) = \pi i^{v+1} b^v H_1^v(2ib).$$

Une troisième forme s'obtient si l'on développe les fonctions J^v et Y^v. En effet,

$$\pi Y^v(2ib) = 2J^v(2ib)\left(\lg b + \frac{i\pi}{2}\right) - (ib)^v \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{2s}}{s!(v+s)!}\left[\psi(s+1)+\psi(s+v+1)\right]$$
$$- (-i)^n \frac{1}{b^n} \sum_{s=0}^{v-1} (-1)^s \frac{(v-s-1)!}{s!} b^{2s}$$

et

$$2i^v b^v J^v(2ib) = (-1)^v 2b^{2v} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{2s}}{s!(v+s)!},$$

par suite,

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}^v(b) = \sum_{s=0}^{v-1} (-1)^s \frac{(v-s-1)!}{s!} b^{2s} \\ + (-1)^{v+1} b^{2v} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{2s}}{s!(v+s)!}\left[2\lg b - \psi(s+1) - \psi(s+v+1)\right]. \end{cases}$$

5. Revenons maintenant à la sommation de la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}}.$$

D'après une formule connue, on a

$$\frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{v+1}}{1.3\ldots(2v-1)\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-c^2y^2 - \pi^2 s^2 y^2} y^{2v} dy,$$

d'où

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{v+1}}{1.3\ldots(2v-1)\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-c^2y^2} y^{2v} dy \sum_{s=1}^{n} e^{-\pi^2 s^2 y^2}$$

n étant un nombre entier quelconque.

(*) *Loc. cit.*, p. 16.

Pour évaluer la somme sous le signe d'intégration, j'écris

$$e^{-\pi^2 s^2 y^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\pi s y x)\, dx$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} e^{-\pi^2 s^2 y^2} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \sum_{s=1}^{n} \cos(2\pi s y x)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi} y} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \sum_{s=1}^{n} \cos(2sz)\, dz \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi} y} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \left(\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} - 1 \right) dz \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\sqrt{\pi} y} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.
\end{aligned}$$

En introduisant cette valeur, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} &= -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{2^{v+1}}{1.3 \ldots (2v-1)\pi^2} \\
&\times \int_0^\infty e^{-c^2 y^2} y^{2v-1} dy \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\pi^2 y^2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.
\end{aligned}$$

ou, en posant

$$c^2 y^2 = t$$

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} &= -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{2^v}{1.3 \ldots (2v-1) c^{2v} \pi^2} \\
&\times \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1} dt \int_0^\infty e^{-\frac{c^2 z^2}{\pi^2 t}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz.
\end{aligned}$$

Dans le second membre de la dernière équation, on reconnaîtra aisément l'intégrale du paragraphe précédent. On aura donc

$$\int_0^\infty e^{-t - \frac{c^2 z^2}{\pi^2 t}} t^{v-1} dt = \pi i^{v+1} \frac{c^v z^v}{\pi^v} \left[\mathrm{J}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\, \mathrm{Y}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) \right],$$

et, par suite,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{i^{v+1}2^v}{1.3\ldots(2v-1)c^v\pi^{v+1}}$$
$$\times \int_0^{\infty} z^v \left[\mathrm{J}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\,\mathrm{Y}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) \right] \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz.$$

Passons maintenant à la limite pour $n = \infty$.

En posant

$$f(z) = z^v \left[\mathrm{J}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\,\mathrm{Y}^v\left(\frac{2icz}{\pi}\right) \right]$$

on sait que

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\infty} f(z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz = \pi \left[\frac{1}{2} f(o) + f(\pi) + f(2\pi) + \cdots \right].$$

Si donc on introduit

$$f(o) = \frac{(-i)^{v+1}(v-1)!\,\pi^{v-1}}{c^v},$$

on trouve

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{2^{v-1}(v-1)!}{1.3\ldots(2v-1)c^{2v}\pi}$$
$$+ \frac{i^{v+1}2^v}{1.3\ldots(2v-1)c^v} \sum_{n=1}^{\infty} n^v \left[\mathrm{J}^v(2icn) + i\,\mathrm{Y}^v(2icn) \right],$$

ce qui s'écrit encore

$$(8). \quad \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{v+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2c^{2v+1}} + \frac{2^{v-1}(v-1)!}{1.3\ldots(2v-1)c^{2v}\pi} \right.$$
$$\left. + \frac{2^v}{1.3\ldots(2v-1)c^{2v}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}^v(nc). \right.$$

De cette manière, la série du premier membre est ramenée à $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}^v(nc)$. Il nous reste encore le calcul de la dernière série.

6. En considérant la formule (7), on voit qu'elle ne convient guère pour le calcul des termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}^{v}(nc)$ à cause du facteur $\frac{(nc)^{2s}}{s!(v+s)!}$ qui ne tend vers zéro que pour s, très grand par rapport à nc.

Pour éviter cette difficulté, nous déterminerons la valeur asymptotique de $\mathcal{K}^{v}(b)$. Cette valeur dépend évidemment des valeurs asymptotiques des fonctions J^{v} et Y^{v}. En effet, on a (*) asymptotiquement

$$e^{-2b}J^{v}(2ib) \equiv \frac{P(2ib) + iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{-ib-\frac{v+1}{2}\pi i} + \frac{P(2ib) - iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{\frac{v\pi i}{2}}$$

$$ie^{-2b}Y^{v}(2ib) \equiv \frac{P(2ib) + iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{-ib-\frac{v+1}{2}\pi i} - \frac{P(2ib) - iQ(2ib)}{2\sqrt{\pi b}} e^{\frac{v\pi i}{2}};$$

par suite,

$$\mathcal{K}^{v}(b) \equiv \sqrt{\pi} b^{\frac{2v-1}{2}} e^{-2b}\left[P(2ib) + iQ(2ib)\right],$$

où

$$P(2ib) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(v^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(v^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(v^2 - \frac{(4s-1)^2}{4}\right)}{(2s)!\, 2^{4s} b^{2s}}$$

$$iQ(2ib) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(v^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(v^2 - \frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(v^2 - \frac{(4s+1)^2}{4}\right)}{(2s+1)!\, 2^{4s+2} b^{2s+1}}.$$

La valeur asymptotique de $\mathcal{K}^{v}(b)$ s'écrit donc

$$(9)\quad \left\{ \mathcal{K}^{v}(b) \equiv \sqrt{\pi} b^{\frac{2v-1}{2}} e^{-2b}\left[1 + \frac{4v^2 - 1^2}{2^4 b} + \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2)}{2!\, 2^8 b^2} + \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2)(4v^2 - 5^2)}{3!\, 2^{12} b^3} + \cdots\right].\right.$$

Si l'on arrête cette série divergente à un terme quelconque, on obtient une valeur qui diffère de la valeur exacte de moins que le dernier terme calculé. Comme on peut admettre $c > \pi$, on voit qu'avec la formule (9) on déterminera aisément les différents termes de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}^{v}(nc)$ avec telle approximation qu'on

(*) Nielsen, *loc. cit.*, p. 156.

voudra. Du reste, les termes consécutifs diminueront rapidement à cause des facteurs exponentiels e^{-2c}, e^{-4c}, etc.

Pour donner un exemple, soit $v = 1$, $c = 5\pi$; dans ce cas, on aura

$$\mathfrak{K}^1(5\pi) < \pi\sqrt{5}e^{-10\pi}$$
$$\mathfrak{K}^1(10\pi) < \pi\sqrt{10}e^{-20\pi}, \text{ etc.},$$

quantités parfaitement négligeables par rapport aux termes précédents.

Il en résulte que dans ce cas on peut négliger entièrement la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}^v(nc)$ et se contenter d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^5(25 + s^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{250\pi^5} + \frac{1}{25\pi^5} = \frac{9}{250\pi^5} = 0.0011605,$$

la différence étant moindre que

$$0,\quad 00000\quad 00000\quad 00000\quad 4$$

7. Avant de terminer, nous présenterons encore une remarque. Il est bien évident que les considérations des paragraphes 4 et 5 sont presque entièrement applicables quand v est un nombre fractionnaire. Si donc nous posons $v = \mu + \frac{1}{2}$, μ étant un nombre entier, nous obtiendrons une nouvelle forme pour la série du paragraphe 2.

En effet, on a, dans ce cas,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\mu+1}} = -\frac{1}{2c^{2\mu+2}}$$
$$+ \frac{i^{\mu+\frac{3}{2}}}{\mu!\pi^{\mu+1}c^{\mu+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} z^{\mu+\frac{1}{2}} \left[\mathrm{J}^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\mathrm{Y}^{\mu}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) \right] \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\, dz$$

où

$$\mathrm{J}^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) + i\mathrm{Y}^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right) = \mathrm{H}_1^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right)$$
$$= -\frac{1}{i^{\mu-\frac{1}{2}}} \frac{\pi^{\mu} e^{-\frac{2cz}{\pi}}}{2^{2\mu} c^{\mu+\frac{1}{2}} z^{\mu+\frac{1}{2}}} \sum_{s=0}^{\mu} \frac{(2\mu - s)!}{s!(\mu - s)!} \left(\frac{4cz}{\pi}\right)^s (*).$$

(*) Nielsen, *loc. cit.*, p. 32.

En posant

$$f(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} \mathrm{H}_1^{\mu+\frac{1}{2}}\left(\frac{2icz}{\pi}\right),$$

on a

$$f(o) = -\frac{1}{i^{\mu-\frac{1}{2}}} \frac{\pi^\mu}{2^{2\mu} c^{\mu+\frac{1}{2}}} \frac{(2\mu)!}{\mu!},$$

par suite

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\mu+1}} = -\frac{1}{2c^{2\mu+2}} + \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu+1}(\mu!)^2 c^{2\mu+1}}$$
$$+ \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\, c^{2\mu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cn} \sum_{s=0}^{\mu} \frac{(2\mu - s)!}{s!\,(\mu - s)!} (4cn)^s.$$

En séparant le premier terme de la série $\sum_{s=0}^{\mu}$ du reste, et en introduisant

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cn} = \frac{1}{e^{2c} - 1},$$

ce résultat s'écrit

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + \pi^2 s^2)^{\mu+1}} = -\frac{1}{2c^{2\mu+2}} + \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu+1}(\mu!)^2 c^{2\mu+1}} \frac{e^{2c} + 1}{e^{2c} - 1}$$
$$+ \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\, c^{2\mu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2cn} \sum_{s=1}^{\mu} \frac{(2\mu - s)!}{s!\,(\mu - s)!} (4cn)^s.$$

Posons, pour développer le second membre de cette équation,

$$e^{-2c} = a, \qquad \frac{1}{1-a} = \mathrm{P},$$

alors on aura successivement

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2nc} = a \frac{d}{da}\left(\frac{1}{1-a}\right) = a \frac{d}{da} \mathrm{P}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-2nc} = a \frac{d}{da}\, a \frac{d}{da}\left(\frac{1}{1-a}\right) = \left(a \frac{d}{da}\right)^2 \mathrm{P}, \text{ etc.}$$

De cette manière, on trouve

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(c^2+\pi^2 s^2)^{\mu+1}} &= -\frac{1}{2c^{2\mu+2}} + \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu+1}(\mu!)^2 c^{2\mu+1}} \frac{e^{2c}+1}{e^{2c}-1} \\ &\quad + \frac{1}{2^{2\mu}\mu!\, c^{2\mu+1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2\mu-s)!}{s!\,(\mu-s)!} (4c)^s \left(a\frac{d}{da}\right)^s \mathrm{P}. \end{aligned} \right.$$

En comparant cette formule à l'équation (1), on est conduit à l'identité

$$2^{s+1}\pi^s \left(a\frac{d}{da}\right)^s \mathrm{P} = (-i)^{s-1} \frac{d^s}{dz^s} [\cos \pi z]_{z=\frac{ic}{\pi}}$$

que l'on vérifiera aisément.

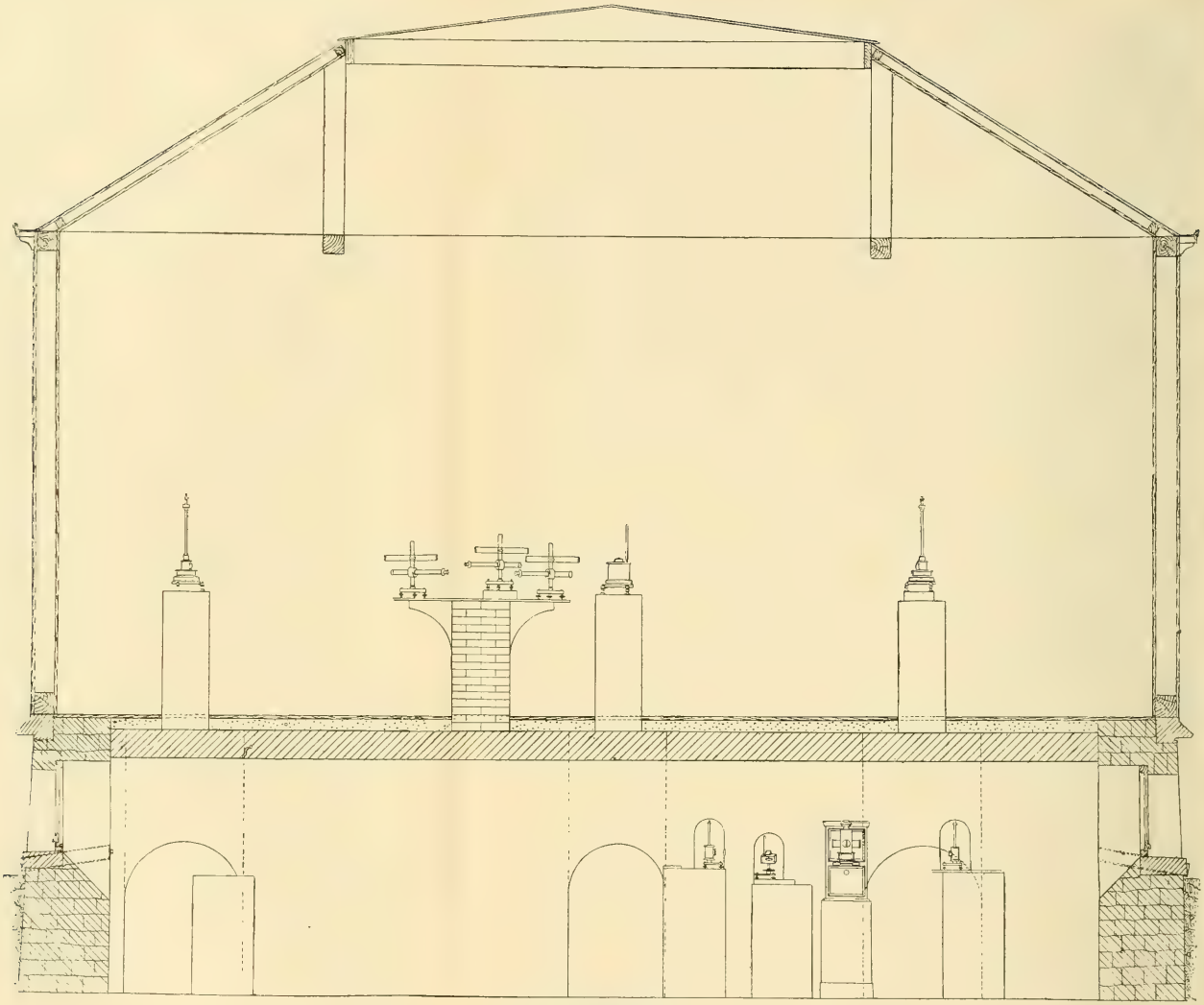
OBSERVATIONS

MAGNÉTIQUES

PAR

M. DEHALU

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE COINTE



Pavillon magnétique.

OBSERVATIONS

MAGNÉTIQUES

DESCRIPTION DES INSTALLATIONS.

Pavillon magnétique.

Le pavillon magnétique (*) est situé au sud-ouest de l'Observatoire, à 80 mètres des bâtiments du service astronomique, et entièrement isolé des autres constructions.

Sa façade vers l'est fait avec le méridien astronomique un angle de 135°, compté du nord vers l'est.

Il se compose de deux grandes salles superposées de 8×7.50 mètres de superficie; une salle de rez-de-chaussée, construite en bois, et une cave en partie souterraine, faite de pierre et moellons. Le fer ni aucune autre substance magnétique ne sont entrés dans leur construction.

La salle du rez-de-chaussée a une hauteur de 5 mètres environ; elle est éclairée à la fois par une large fenêtre au sud, par le versant sud du toit, en partie vitré, et par un vaste lanterneau disposé au faîte du toit. Son plancher est à 1^m25 au-dessus du niveau du sol; il ne repose pas directement sur la

(*) Voir, planche ci-contre, une coupe longitudinale du pavillon magnétique.

voûte, mais sur les murs extérieurs de la cave. La porte d'entrée est située à l'extrémité ouest de la façade nord.

La cave, dont le sol se trouve à 1^m25 au-dessous du niveau du sol extérieur, contient les appareils de variation à enregistrement photographique. On y pénètre par un escalier dissimulé sous une trappe dans l'angle sud-est de la salle du rez-de-chaussée. Deux fenêtres, situées l'une au nord, l'autre au sud, permettent de l'éclairer et exceptionnellement de l'aérer. Elles sont munies de verres rouges qui ne laissent passer aucune lumière actinique; mais, afin d'éviter les variations brusques de température, elles sont le plus souvent closes par des volets. Deux bouches d'aération, l'une au nord, l'autre au sud, qu'on peut ouvrir ou fermer à volonté, constituent le système d'aération en temps ordinaire.

La variation journalière de la température dans la cave n'atteint guère que quelques dixièmes de degré centigrade; la variation annuelle est d'environ 14°, de + 3° à + 17°.

La salle du rez-de-chaussée est soumise aux fluctuations de la température extérieure; néanmoins, les appareils à lecture directe qui y sont installés, grâce à la qualité des aimants employés, ont donné des résultats comparables en précision à ceux du magnétographe de la cave.

Quant aux observations absolues, elles ne se font plus dans le pavillon magnétique, mais à l'extérieur, au centre de la pelouse de l'Observatoire.

Magnétographe.

Les appareils pour l'enregistrement photographique des variations des éléments du magnétisme terrestre sont du système Mascart. Ils comprennent : un déclinomètre, un bifilaire, une balance et un enregistreur Duboscq. Ils furent livrés en 1882, par M. Carpentier, ingénieur-constructeur à Paris. Mais ce n'est qu'en octobre 1903 qu'on en décida l'installation définitive, en vue de la carte magnétique des bassins houillers belges, que nous entreprîmes l'année suivante.

Les premiers essais ne furent pas heureux : certains miroirs s'étaient déformés avec le temps et la balance manquait de sensibilité. On jugea nécessaire de renvoyer les instruments au constructeur.

Rentrés le 31 mars 1904, ils furent immédiatement réinstallés et fonctionnèrent à notre entière satisfaction jusqu'à la fin de notre campagne magnétique, en octobre 1904. Quelques légères modifications suggérées par l'expérience furent alors apportées, et la nouvelle installation fonctionne depuis le 1er décembre 1904. C'est celle-ci que nous décrirons spécialement.

Les trois appareils de variation sont établis sur trois piliers isolés, situés dans la partie nord de la cave. Ils forment les sommets d'un triangle sensiblement isocèle, dont la base, orientée suivant le méridien magnétique, a 2^{m}40 de longueur, et les deux autres côtés chacun 1^{m}70. Le déclinomètre est à l'extrémité sud de la base, le bifilaire à l'extrémité nord; la balance occupe le troisième sommet à l'est.

L'enregistreur Duboscq est disposé au milieu de la base, à égale distance du déclinomètre et du bifilaire ; il est fixé au moyen d'écrous sur une dalle de granit placée au niveau du sol.

Comme les distances et les élévations des piliers destinés à recevoir les appareils n'avaient pas été déterminées avec toute la précision requise lors de la construction du pavillon magnétique, on dut sceller sur le pilier nord du bifilaire une tablette en pierre de 60 × 60 centimètres et de 1^{cm}5 d'épaisseur, qui dépasse le pilier de 10 centimètres vers le sud, et sur le pilier est une tablette de 35 × 35 centimètres et de 4^{cm}5 d'épaisseur, dépassant le pilier de 7 centimètres vers le sud et de 3 centimètres vers l'ouest. Sur ces tablettes reposent le bifilaire et la balance; le déclinomètre est installé directement sur le pilier.

Les dessus des trois piliers furent vernis avant la mise en place des appareils, qui furent ensuite enfermés dans des cloches en verre, closes hermétiquement au moyen de bandes circulaires de drap enduit de suif. Sous les cloches sont, en outre, disposées des matières desséchantes : chlorure de calcium et acide

nitrique. Un psychromètre de Lambrechts, installé sous la cloche du bifilaire, permet de lire les variations d'humidité. Elles sont, en général, faibles; elles n'atteignent guère, en effet, plus de 2 ou 3 % par mois. Toutefois, les desséchants sont renouvelés lorsque la variation totale atteint 20 %. Un tel écart ne semble pas affecter les indications de nos appareils, ainsi qu'on a pu s'en rendre compte à diverses reprises en faisant varier brusquement l'état d'humidité de plus de 20 %.

La graduation du bifilaire et de la balance se fait, comme de coutume, à l'aide de la règle de comparaison. Mais afin d'éviter à chaque opération l'enlèvement des cloches qui recouvrent les appareils, on a disposé à quelque distance de leurs centres des tablettes en pierre de 15 × 15 centimètres, au milieu desquelles sont fixés des goujons en cuivre de 7 millimètres de diamètre et de 15 millimètres de hauteur, qui peuvent s'engager dans une ouverture cylindrique de mêmes dimensions, pratiquée au centre du support de la règle de comparaison. Ces goujons, qui servent de pivots à la règle, sont disposés à des distances rigoureusement les mêmes des centres des trois appareils et dans des positions qui conviennent à la graduation, c'est-à-dire, pour le déclinomètre, en arrière et dans la position du méridien magnétique, pour le bifilaire, à l'ouest dans un plan perpendiculaire. Des traits de repère, un sur la partie inférieure de la règle de comparaison, les autres sur les tablettes, permettent, en outre, d'orienter rapidement la règle pour chacun des appareils. Ajoutons que l'épaisseur des tablettes a été calculée de façon à amener l'aimant déviant à la hauteur de l'aimant dévié.

Le relevé des températures se fait à l'aide de deux thermomètres placés l'un sous la cloche du bifilaire, l'autre sous la cloche de la balance, et d'un thermographe de Richard installé dans la partie sud de la cave.

La lampe à gazogène qui accompagne l'enregistreur fut remplacée, dès le début de la première installation, par une lampe à pétrole, qui réalise sur la précédente, outre une économie notable, des avantages multiples. Comme ce mode d'éclairage

pourrait être préféré dans certaines circonstances, nous entrerons dans quelques détails.

La nouvelle lampe s'adapte, comme l'ancienne, à la lanterne à trois corps de l'enregistreur Duboscq.

Elle se compose (fig. 1) d'un réservoir A cylindrique en cuivre de 90 millimètres de diamètre et de 45 millimètres de hauteur, surmonté d'une partie B cylindrique de 47 millimètres de hauteur et de 35 millimètres de diamètre; cette dernière dimension correspond à l'ouverture inférieure de la lanterne Duboscq. Ce cylindre sert de support à une pièce C ajourée en cuivre qui, tout en laissant pénétrer l'air sous la flamme, porte un verre D de 35 millimètres environ de hauteur et de 20 millimètres de diamètre. Au centre de la lampe un tube E de 7 millimètres de diamètre et de 115 millimètres de hauteur sert de conduite à une mèche ronde en coton qu'on peut élever ou abaisser à volonté à l'aide d'un bouton de manœuvre F. La partie supérieure du verre est retenue par un anneau fixé à la lampe au moyen d'une tige. Cette lampe, qui a été confectionnée à l'Observatoire, brûle environ 100 centimètres

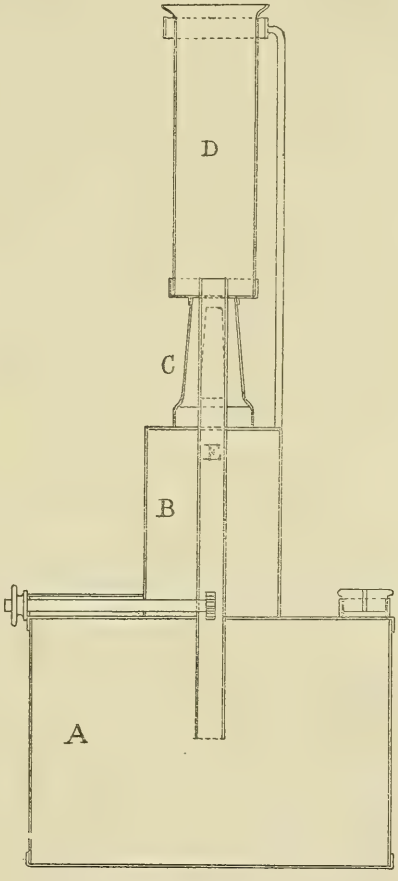


Fig. 1. Lampe à pétrole.

cubes de pétrole par jour, ce qui ne représente dans notre pays qu'une dépense très minime.

Comme papier photographique, nous avons adopté, après de nombreux essais effectués sur des papiers de différentes marques, celui au gélatino-bromure d'argent du Dr Stolze, de Charlottenburg. Il est très rapide et donne une impression remarquable. Pour le développement, nous nous servons du procédé au métol-hydroquinone.

La division des feuilles en heures s'effectue comme suit : On détermine d'abord les durées d'exposition, en notant les temps de la mise en marche et de l'arrêt du châssis, on subdivise ensuite cet intervalle à l'aide d'une règle en verre portant 144 divisions, chacune d'elles représentant un intervalle de dix minutes. La grandeur de ces divisions résulte de nombreuses mesures effectuées sur les épreuves.

Les ordonnées des courbes se mesurent au moyen d'une seconde règle en buis divisée en millimètres. On la pose à plat sur la règle en verre et parallèlement à ses divisions ; on évalue le $^1/_{10}$ de millimètre à l'estime.

Appareils de variations à lectures directes.

La salle du rez-de-chaussée comprenait primitivement sept piliers (nos 1 à 7, fig. 2) complètement isolés du plancher et de la voûte de la cave qu'ils traversent.

Les piliers 1 et 2 portent les deux parties d'un inclinomètre inducteur de Wéber, dont la lunette de lecture est placée sur une console reliée à la paroi est du bâtiment.

Les piliers 3 et 4 sont sensiblement dans le méridien astronomique. Le pilier 3 est disposé en face d'une fenêtre close par un double volet, l'un intérieur, l'autre extérieur; il porte un théodolite d'Edelmann destiné à viser soit au dehors sur un signal ou sur le ciel, soit au dedans sur le barreau collimateur d'un magnétomètre de Wild installé en A sur un support en bois indépendant du plancher et fixé sur la voûte de la cave. C'est à l'aide de ce théodolite et du barreau collimateur que se

firent, à des intervalles irréguliers toutefois, les déterminations absolues de la déclinaison magnétique avant 1904.

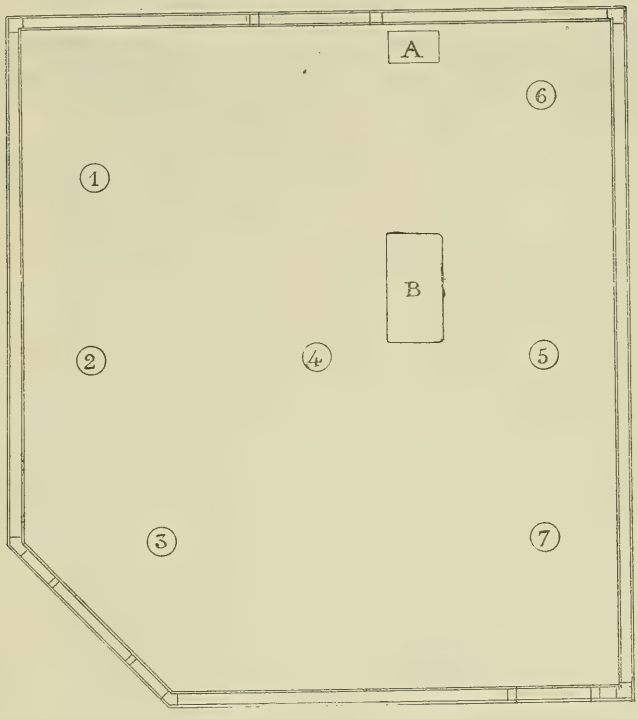


Fig. 2. Rez-de-chaussée.

Trois appareils de variation avaient, en outre, été fournis par Edelmann à la fondation de l'Observatoire : une balance magnétique munie d'un barreau cylindrique creux de 11 centimètres de longueur, de 11 millimètres de diamètre et de $1^{mm}5$ d'épaisseur, et deux déclinomètres identiques dont les barreaux recourbés en forme de fer à cheval avaient 29 millimètres de hauteur, 3×3 millimètres de section et 9 millimètres d'écartement pour les deux branches. Ces deux aimants étaient enfermés dans des cylindres creux en cuivre de 18 millimètres de diamètre intérieur et de 25 millimètres de hauteur, fixés verticalement au centre des supports des deux appareils.

Un de ces déclinomètres prêté à l'Observatoire royal de Belgique nous revint en 1902. Au début de 1904, on le transforma en bifilaire par l'adjonction de deux petites poulies destinées à porter le fil de suspension et fixées l'une à la partie inférieure du cercle de torsion, l'autre à l'équipage du barreau aimanté.

Les trois appareils : balance, déclinomètre et bifilaire, furent à cette époque installés respectivement sur les piliers 5, 6 et 7 (fig. 2).

Les lunettes et les échelles divisées furent disposées en B (fig. 2) sur une table en granit de $1^{m}50 \times 0^{m}75$, que nous avions fait établir sur un pilier isolé du plancher et reposant sur la voûte de la cave. Mais les indications du déclinomètre et du bifilaire relevées pendant le cours de l'année 1904 laissèrent beaucoup à désirer. Les cylindres qui renfermaient les aimants étaient si exigus qu'il était difficile d'y maintenir les aimants en équilibre; en outre, la graduation des appareils, qui s'effectuait avec un aimant déviant de forme cylindrique identique à celui de la balance, manquait de précision.

En octobre 1904, on décida de modifier complètement le déclinomètre et le bifilaire.

Des aimants primitifs furent remplacés par des aimants cylindriques creux de mêmes dimensions que ceux de la balance et de la règle de comparaison. On supprima les cylindres en cuivre qui renfermaient les anciens aimants et on les remplaça par des cylindres en verre de $16^{cm}5$ de diamètre et $4^{cm}5$ de hauteur, qui supportent des plaques circulaires en verre de $18^{cm}5$ de diamètre et 3 millimètres d'épaisseur, percées en leurs centres d'une ouverture circulaire de $5^{cm}5$ de diamètre (fig. 3).

Les fils de suspension des nouveaux aimants sont en platine et ont 0,02 millimètre de diamètre; l'écartement des fils du bifilaire est de 10 millimètres.

Les nouveaux aimants, en acier très dur, et les cylindres en verre ont été fournis par Edelmann, de Munich. La partie mécanique a été tout entière réalisée à l'Observatoire.

Les distances des miroirs des trois appareils : déclinomètre,

Fig. 3. Magnétomètre.

bifilaire et balance, à leur échelle respective sont exactement de 2^m578, 3^m437 et 1^m719.

La balance est à 3^m50 du déclinomètre et à 2^m50 du bifilaire.

Les échelles divisées se lisent aisément pendant le jour; le soir, on peut les éclairer à l'aide de petites lampes à incandescence qu'on allume au moment de la lecture en agissant sur des boutons disposés sur la table B.

La nouvelle installation ne fonctionne que depuis le 24 janvier 1905.

Appareils pour les déterminations absolues.

Au début, les appareils pour les déterminations absolues comprenaient : un théodolite magnétique de Lamont, un magnétomètre de Wild pour la déclinaison et un inducteur de Wéber pour l'inclinaison.

Ces deux derniers appareils sont encore installés dans la salle du rez-de-chaussée.

Au commencement de l'année 1904, un magnétomètre d'Elliott n° 45 et une boussole d'inclinaison de Dover n° 54, appartenant à l'Institut de Physique de l'Université de Liége, furent mis obligeamment à notre disposition par M. le professeur de Heen. Ils sont depuis peu devenus la propriété de l'Observatoire.

Ces deux derniers appareils servent exclusivement, depuis le mois de décembre 1904, aux déterminations absolues de la déclinaison, de la composante horizontale et de l'inclinaison.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS DU 1er JANVIER 1905.

Pour fixer les éléments du 1er janvier 1905, nous avons utilisé les observations des mois de décembre 1904 et janvier 1905. Afin de ne pas interrompre la série des observations au magnétographe, les expériences de température pour cet appareil ont été reportées au mois de février; on a, en outre, utilisé les observations des appareils à lectures directes et les déterminations absolues effectuées pendant ce mois.

Constantes des appareils de variation.

La graduation des appareils enregistreurs a été déterminée deux fois, le 1er décembre 1904 et le 8 février 1905.

Voici le tableau des résultats :

	Valeur de 1mm d'ordonnée.		
Date.	Déclinomètre.	Bifilaire.	Balance.
1er décembre 1904. . . .	1'48	0.000063 c. g. s.	0.000053 c. g. s.
8 février 1905.	1 48	0.000067	0.000057
Moyenne . . .	1'48	0.000065 c. g. s.	0.000055 c. g. s.

La graduation des appareils à lectures directes a donné, pour valeur d'une division des échelles :

	Valeur d'une division de l'échelle.		
Date.	Déclinomètre.	Bifilaire.	Balance.
8 février 1905. . . .	40″	0.000032 c. g. s.	0.000174 c. g. s.

L'influence de la température sur les ordonnées du bifilaire et de la balance du magnétographe a été déterminée à quatre reprises différentes en chauffant la cave.

La première expérience a été faite en enlevant les cloches de verre qui recouvrent les appareils.

L'humidité de la cave fut mesurée au psychomètre d'Assmann, au début et à la fin de l'expérience : de 96 %, elle descendit à 76 %.

Les autres expériences furent exécutées sans enlever les cloches, afin d'éviter les variations d'humidité.

La concordance des résultats obtenus par ces quatre expériences montre que celles-ci n'ont pas eu d'action marquée sur nos appareils.

Voici le tableau des valeurs obtenues :

Date.	Températures observées.	Variation pour 1° de température. Bifilaire.	Balance.
		mm	mm
11 février 1905. .	de 5°0 à 11°3	1 68 = 0.000106 c. g. s.	2 06 = 0 000115 c. g. s.
17 — . .	de 4 9 à 8 0	1 59 = 0.000103	1 95 = 0.000109
18 — . .	de 5 7 à 11 6	1 57 = 0.000102	2 45 = 0.000137
21 — . .	de 5 9 à 12 0	1 60 = 0.000104	2 40 = 0.000134
		0.000104	0.000124

L'influence de la température sur les appareils à lectures directes est beaucoup moindre; elle a été déterminée d'abord en chauffant la salle à deux reprises différentes, les 20 et 24 février, ensuite, en comparant les lectures directes des 12, 13 et 17 février, aux ordonnées correspondantes des courbes du magnétographe.

On a trouvé de la sorte :

Date.	Températures observées.	Variation pour 1° de température. Bifilaire.	Balance.
20 février 1905 . .	de 4°4 à 9°5	1d0 = 0.000033 c. g. s.	0.00000
24 — . .	de 4 4 à 9 0	1 4 = 0.000045	»
12-17 — . .	»	1 3 = 0.000042	»
13-17 — . .	»	1 6 = 0.000051	»
	Moyenne . . .	0.000043	

Déclinaison.

Le méridien astronomique est obtenu en visant une mire dont l'azimut a été déterminé par de nombreuses observations du Soleil. Le méridien magnétique est conclu de la moyenne des lectures fournies par deux séries au moins de retournements de l'aimant collimateur.

Les collimations déduites sont peu différentes et constituent un excellent contrôle des observations.

La torsion du fil a été déterminée chaque fois : elle n'a jamais dépassé 6′ pour 90° de torsion. Son effet est donc absolument négligeable.

Voici le tableau des résultats obtenus avec, en regard, les indications correspondantes du magnétographe ou du déclinomètre à lectures directes.

Date.	Déclinaison.	Collimation.	Ordonnée.	Échelle.
14^h37^m–14^h41^m, 9 décembre 1904.	13° 17′ 10″	12′ 40″	16.5	»
15 03 –15 12 17 —	13 16 30	13 20	15.5	»
14 23 –14 32 27 —	13 16 03	13 10	15.5	»
14 49 –14 55 11 janvier 1905. .	13 19 31	11 55	17.4	»
15 10 –15 23 24 — . .	13 14 18	14 48	15.2	372.90
16 42 –16 50 26 — . .	13 12 35	13 25	14.2	371.14
16 09 –16 30 27 — . .	13 14 24	13 45	15.2	372.86
15 20 –15 33 9 février 1905. .	13 18 18	13 34	16.5	378.74
Moyenne . . .	13° 16′ 05″		15.7	373.91

Une première valeur de la ligne de base du déclinomètre enregistreur se tire de la comparaison des nombres des 2e et 4e colonnes :

$$13°16'05'' - 15.7 \times 1'5 = 12°52'32''.$$

La moyenne des quatre dernières valeurs de la déclinaison est 13° 14′ 54″ et celle des valeurs correspondantes de l'échelle ou déclinomètre est 373.91. Si l'on représente par l la lecture de

l'échelle, la formule de réduction du déclinomètre à lectures directes sera

$$D = 13°14'54'' + (l - 573{,}91) \times 40''.$$

Si, à l'aide de cette formule, on réduit les observations du 24 janvier au 8 février, et si on les compare aux données correspondantes du magnétographe, on aura pour ce dernier une nouvelle valeur de la ligne de base.

Voici le relevé de ces observations :

Date.	Lectures directes.	Magnétographe.	Écarts.
		mm	
24 janvier	13°13'40''	15 20	+57''
25 —	13 13 54	15 30	+52
26 —	13 14 11	15 40	+44
27 —	13 14 40	15 20	−03
28 —	13 14 11	15 08	+15
29 —	13 14 53	15 40	+04
30 —	13 13 56	14 83	+08
31 —	13 13 25	14 61	+08
1er février	13 15 25	15 75	+01
2 —	13 14 19	15 11	+09
3 —	13 15 52	15 53	−48
4 —	13 14 31	14 54	−53
5 —	13 12 31	13 50	−27
6 —	13 12 24	13 83	+10
7 —	13 14 29	14 60	−36
8 —	13 14 23	14 56	−44
Moyenne. . . .	13°14'10''	14 90	00''

La valeur de la ligne de base déduite de ce tableau est

$$13°14'10'' - 14.90 \times 1'5 = 12°51'49''.$$

Nous avons adopté comme valeur définitive la moyenne non pondérée des deux nombres, 12° 52' 32'' et 12° 51' 49'', et comme formule de réduction du déclinomètre enregistreur

$$D = 12°52'10'' + n \times 1'5.$$

Composante horizontale.

La valeur absolue de la composante horizontale a été déterminée chaque fois par la méthode combinée des oscillations et des déviations.

Dans le calcul du rapport et du produit du moment magnétique m de l'aimant et de la composante horizontale H de la force magnétique, on a tenu compte des corrections de température et d'induction telles qu'elles ont été déterminées à l'Observatoire de Kew en 1881. La formule de correction de température est

$$0.00300(t - 0^\circ) + 0.000\,000\,82(t - 0)^2,$$

où t est la température observée.

Le coefficient d'induction μ est 5.01.

Quant au moment d'inertie K de l'aimant et de son équipage, on a adopté de préférence la moyenne de trois valeurs obtenues plus récemment, en observant les temps d'oscillation de l'aimant collimateur alternativement avec et sans un cylindre auxiliaire de cuivre dont la masse et les dimensions ont été de nouveau déterminées avec le plus grand soin.

Dans ce qui suit, nous donnons en regard les constantes du cylindre auxiliaire et du barreau collimateur déterminées à Kew en 1881 et à Cointe en 1904 : l et d désignent respectivement la longueur et le diamètre, exprimés en centimètres, du cylindre auxiliaire, m sa masse en grammes, k le moment d'inertie de l'aimant collimateur et π la valeur du rapport de la circonférence au diamètre.

Constantes.

	Kew 1881.	Cointe 1904.
	Cylindre auxiliaire.	
l	9.612	9.615
d	0.998	0.998
M	63.688	63.691

Barreau collimateur.

log $\pi^2 k$ à 0° C. 3.48030	3.48019	26 octobre	1904
	3.48004	27	—
	3.48025	27	—
Moyenne . . .	3.48016		

L'accroissement de la valeur de log $\pi^2 k$ est de 0.00011 par 10° d'élévation de température.

La durée d'une oscillation est toujours déduite de 12 séries de 100 oscillations, obtenues en observant le temps du passage du milieu de l'échelle de l'aimant collimateur au centre du réticule de la lunette de 5 en 5 oscillations jusqu'à la 55e, puis de même de la 100e à la 155e, et en retranchant la 0e oscillation de la 100e, la 5e de la 105e, etc. Les moyennes des observations paires ou impaires fournissent deux séries dont la moyenne divisée par 100 donne la durée d'une oscillation.

Ce procédé, emprunté aux observateurs anglais, a l'avantage d'éliminer les erreurs systématiques qui affectent les oscillations de l'aimant de droite à gauche et de gauche à droite.

Les temps des passages sont notés au moyen d'un chronographe électrique adapté à une pendule sidérale de Cooke.

Dans la réduction des temps observés, on ne tient pas compte de la marche de l'horloge et de l'amplitude des oscillations : la première est, en effet, toujours inférieure à 1s par jour, et la deuxième ne dépasse jamais 50′. Mais on réduit le temps sidéral en temps moyen et l'on tient compte de la torsion du fil.

On détermine cette dernière en faisant tourner de 180°, dans un sens et dans l'autre, le cercle de torsion, et on lit la déviation produite sur l'échelle de l'aimant collimateur. Dans nos expériences, cette variation n'a jamais dépassé 6′ pour 90° de torsion.

Les observations de déviation se font toujours lorsque les centres des deux aimants sont à des distances de 30 et 40 centimètres.

La valeur du terme P se déduit de la formule de Rücker (*)

$$P = \frac{r_1^2 r^2}{r_1^2 - r^2} \frac{l - l_1}{\mu} - \frac{(r_1^2 + r^2) r_1^2 r^2}{2(r_1^2 - r^2)^2} \left(\frac{l - l_1}{\mu}\right)^2,$$

où r et r_1 représentent les deux distances et l, l_1 les logarithmes vulgaires des valeurs de $\frac{m}{H}$ pour ces deux distances.

Pour l'usage, nous écrivons

$$\frac{P}{r^2} = \frac{r_1^2}{r_1^2 - r^2} \frac{l - l_1}{\mu} - \frac{(r_1^2 + r^2) r_1^2}{2(r_1^2 - r^2)^2} \left(\frac{l - l_1}{\mu}\right)^2$$

et

$$\frac{P}{r_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2 - r^2} \frac{l - l_1}{\mu} - \frac{(r_1^2 + r^2) r^2}{2(r_1^2 + r^2)^2} \left(\frac{l - l_1}{\mu}\right)^2$$

ou, en faisant $r = 30$ centimètres et $r_1 = 40$ centimètres,

$$\frac{P}{30^2} = 5.2631\,(l - l_1) - 21.6407\,(l - l_1)^2$$

$$\frac{P}{40^2} = 2.9605\,(l - l_1) - 12.1730\,(l - l_1)^2$$

Voici un exemple extrait de notre carnet :

Oscillations.

11 janvier 1905. — Heure de $15^h\,0^m$ à $15^h\,12^m$.

Pendule sidérale de Cooke — chronographe électrique.

(*) *Nature*, vol. XXXVI, p. 508. London.

Échelle se mouvant à droite.

Osc.	Temps.	Osc.	Temps.	Durée.
0	0m47s84	100	7m55s92	7m8s08
10	1 30 61	110	8 38 86	8 25
20	2 13 44	120	9 21 60	8 16
30	2 56 23	130	10 4 53	8 30
40	3 39 05	140	10 47 42	8 37
50	4 21 82	150	11 30 24	8 42
			Moyenne . . .	7m8s263

Osc.	Temps.	Osc.	Temps.	Durée.
5	1m 9s 15	105	8m17s57	7m8s42
15	1 52 06	115	9 0 33	8 27
25	2 34 90	125	9 43 23	8 33
35	3 17 67	135	10 26 09	8 42
45	4 0 52	145	11 08 85	8 33
55	4 43 39	155	11 51 70	8 31
			Moyenne . . .	7m8s347

Moyenne en temps sidéral . . . 7m8s305
Correction . . . — 1.170

Moyenne en temps moyen . . . 7m7s135

1 oscillation . . . 4s2716

Amplitude des oscillations { au commencement, de la 10e à la 60e division. à la fin, de la 30e à la 50e division.

Température { avant, 4°7. après, 4°7.

Échelle verticale : lecture correspondant à l'horizon, 15e division.

Torsion du fil.

Torsion.	Lecture.	Échelle.		
0°	180°	$\frac{30+50}{2} = 40.0\ a$		
+180	360	$\frac{40+53}{2} = 46.5\ b$	$\frac{a+c}{2} = 40.0\ f$	
0	180	$\frac{47+33}{2} = 40.0\ c$		$b-f = 6.5$
−180	360	$\frac{28+43}{2} = 35.5\ d$	$\frac{c+e}{2} = 40.3\ g$	
0	180	$\frac{33+48}{2} = 40.5\ e$		$d-g = 4.8$
			Somme . . .	11.3

Torsion pour 90°, 2ᵈ.82 ou en minutes : $2.82 \times 1'.74 = 4'.91$.

Calcul.

$1+\frac{H}{F}$	1.00091	$T_0 = T_1 = 4^s2716$	$\log T_1$	0.63039
$-Q(t-t_0)$	143			
$+\mu\frac{H_0}{m_0}$	0.00110			
			$2\log T_1$	1.26118
Σ	1.00058		$\log \Sigma$	0.00025
			$\log T^2$	1.26143
			$\log \pi^2 K$	3.48021
			lo $mH = \frac{\pi^2 K}{T^2}$	2.21878

Déviations.

Aimant.	Distance.	Pôle N.	T.	Vernier.	Moyennes et différences.	
Est	30 cm	E	4°2	92° 06′ 35″	92° 02′ 00″	
	40	W		63 50 40	52 03 43	
	40	E	4°2	80 19 35	———	
	30	W		52 8 25	39° 58′ 17″	$2u_0$
					19° 59′ 09″	u_0
Ouest	30	W	4°0	51° 59′ 00″	80° 18′ 28″	
	40	E		80 17 20	63 48 30	
	40	W		63 46 20	———	
	30	E	4°0	91 57 25	16° 29′ 58″	$2u'_0$
					8° 14′ 59″	u'_0

Calcul.

	$r_0 = 30^{cm}$	$r_0 = 40^{cm}$	$\log \frac{1}{2} r^3$	4.13010	4.50496
$1 + \frac{2\mu}{r_0^3}$	1.00037	1.00016	$\log \sin u_0$	9.53375	9.15682
$+(t - t_0)\Omega$	0.00125	0.00125		———	———
	———	———	$\log \frac{m_0}{H_0}$	3.66385	3.66178
Σ	1.00162	1.00141	$\log \Sigma$	0.00070	0.00061
				———	———
			$\log \frac{m'}{H'}$	3.66455	3.66239
$1 - \frac{P}{30^2} = 0.98865$; $1 - \frac{P}{40^2} = 0.99367$			$\log \left(1 - \frac{P}{r^2}\right)$	$\bar{1}.99504$	$\bar{1}.99725$
				———	———
			$\log \frac{m}{H}$	3.65959	3.65964

		$\log \frac{m}{H}$	3.65962
		$\log mH$	2.21878
			———
$\log m^2$	5.87840	$\log H^2$	$\bar{2}.55916$
$\log m$	2.93920	$\log H$	$\bar{1}.27958$
m	869.37	H	0.19036

Le tableau suivant renferme tous les éléments nécessaires au calcul des observations absolues de la composante horizontale et des lignes de base des bifilaires enregistreur et à lectures

directes. Pour simplifier l'écriture, nous avons désigné par M les indications qui se rapportent au bifilaire enregistreur et par E celles du bifilaire à lectures directes.

	Oscillations.		Déviations.		t	m	H	M		E	
	Durée.	t	u_0	u'_0				ord.	t	Échelle.	t
9 décembre 1904, 15h41m.	4s2699	3o7	19° 53' 13"	8° 13' 58"	3°5	870,02	0,19028	21.0	7.2	»	»
17 — 15 40 .	4 2732	11 5	19 54 13	8 13 35	11 2	870,56	0,19039	21.0	7.4	»	»
27 — 15 07 .	4 2666	4 8	19 55 39	8 14 59	3 9	871,73	0,19028	16.5	5.5	»	»
11 janvier 1905, 15 25 .	4 2716	4 7	19 59 09	8 14 59	4 1	869,37	0,19036	20.5	4.5	»	»
24 — 16 00 .	4 2697	6 4	19 55 49	8 14 25	5 1	867,94	0,18991	14.6	3.7	»	»
9 février 1905, 16 07 .	4 2680	3 5	19 55 16	8 14 45	2 5	874,09	0,19031	. . .	. . .	439 88	7.3
16 — 15 42 .	4 2728	9 7	19 54 21	8 13 45	8 7	870,30	0,19042	20.9	7.5	444.36	9.1
18 — 15 44 .	4 2784	10 7	19 56 9	8 13 50	8 9	868,62	0,19032	27.0	11 0	444.63	9.0
21 — 15 18 .	4 2703	6 2	19 56 0	8 14 8	5 8	869,71	0,19046	27.5	11.1	439.53	4.8

Calculons d'abord la ligne de base du bifilaire enregistreur.

Les indications du magnétographe faisant défaut pour le 9 février 1905, la moyenne des ordonnées restantes est $21^{mm}13$,

celle des températures correspondantes 7°2 et celle des valeurs de la composante horizontale 0.19030. L'équation qui détermine la ligne de base du bifilaire s'écrira donc

$$0.19030 = H_\beta - k \times 21.15 + c \times 7.2,$$

où H_β représente la valeur de la ligne de base à zéro degré de température, $k = 0{,}000065$ et $c = 0{,}000104$.

On en tire

$$H_\beta = 0.19092 \text{ à } 0^\circ \text{ C},$$

ou, pour faciliter les réductions,

$$H_\beta = 0.19196 \text{ à } 10^\circ \text{ C},$$

La formule de réduction des ordonnées du magnétographe bifilaire s'écrira donc

$$H = 0.19196 - 0.000065\, y + 0.000104(t - 10),$$

y représentant l'ordonnée en millimètres et t la température du bifilaire.

La ligne de base du bifilaire à lectures directes résulte des moyennes des quatre dernières valeurs de la composante horizontale et des nombres contenus dans les deux dernières colonnes du tableau précédent.

On trouve ainsi

$$0.19038 = H_\beta - x \times 442.1 + c \times 7.6;$$

ce qui peut s'écrire

$$0.19038 = H_\beta - x \times 440 - x \times 2.1 + c \times 7.6,$$

ou, si nous adoptons comme ligne de base la division 440 de l'échelle,

$$0.19038 = H'_\beta - x \times 2.1 + c \times 7.6,$$

où H'_β représente la valeur de la composante horizontale correspondant à la division 440 de l'échelle,

$$x = 0.000032 \qquad \text{et} \qquad c = 0.000043.$$

On tire de là

$$H'_\beta = 0.19013 \text{ à } 0°C$$

et

$$H'_\beta = 0.19056 \text{ à } 10°C.$$

La formule de réduction des lectures de l'échelle du bifilaire s'écrira donc

$$H = 0.19056 - 0.000032(l - 440.0) + 0.000043(t - 10),$$

où l représente la lecture de l'échelle et t la température de la salle.

Nous avons encore déterminé une nouvelle valeur de la ligne de base du magnétographe bifilaire en réduisant par la formule précédente les lectures du bifilaire faites du 10 au 23 février et en les comparant aux ordonnées correspondantes de la courbe du bifilaire enregistreur.

Les données nécessaires pour ce calcul se trouvent dans le tableau suivant :

Date.	E		M		H
	t	Échelle.	t	Ordonnée.	H calculé.
10 février 1905. . . .	4.3	439.30	5.5	20.37	0.190337
11 —	4.8	435.00	5.4	17.60	0.190496
12 —	2.3	437.58	6.1	19.40	0.190306
13 —	1.8	438.25	5.1	19.15	0.190263
14 —	2.0	438.17	4.8	17.17	0.190275
15 —	4.8	441.80	4.5	17.33	0.190279
16 —	5.7	442.00	4.9	17.60	0.190369
17 —	7.8	443.79	5.9	18.45	0.190344
19 —	7.2	441.15	7.0	20.35	0.190440
20 —	4.5	438.30	6.3	19.20	0.190378
21 —	3.3	432.00	5.9	16.00	0.190528
22 —	3.5	435.76	6.7	18.98	0.190416
23 —	2.3	135.00	5.4	17 90	0 190389
	Moyenne . . .		5.65	18 42	0.190371

La valeur de la ligne de base du bifilaire enregistreur se tire de l'équation

$$0.190371 = H_\beta - 0\,000065 \times 18.42 + 0.000104 \times 5.65.$$

On trouve ainsi

$$H_\beta = 0.19098 \text{ à } 0^\circ \text{ C}$$

ou

$$H_\beta = 0.19202 \text{ à } 10^\circ \text{ C}.$$

Nous avions trouvé précédemment

$$H_\beta = 0.19196 \text{ à } 10^\circ \text{C}.$$

Ces deux valeurs sont suffisamment concordantes; nous en avons pris la moyenne et adopté comme formule de réduction des ordonnées du bifilaire enregistreur :

$$H = 0.19199 - 0.000065\, y + 0.000104(t - 10^\circ).$$

Inclinaison.

On a pris chaque fois, comme valeur absolue de l'inclinaison, la moyenne des valeurs fournies par les aiguilles n° 1 et n° 2.

La trace du méridien magnétique ou du maximum d'inclinaison sur le cercle horizontal a été déterminée comme de coutume en observant le plan du minimum d'inclinaison pour l'une des deux aiguilles, puis en tournant l'équipage de 90°.

On a néanmoins expérimenté le procédé des inclinaisons correspondantes (*) sans lui trouver un avantage bien marqué sur le procédé classique. La graduation spéciale du cercle horizontal de la boussole de Dover en quatre quadrans de 0° à 90° est, en outre, une cause de trouble dans l'application de cette méthode.

Nous avons adopté les notations suivantes pour indiquer les lectures du cercle vertical correspondant aux pointés des extré-

(*) *Annales de l'Observatoire magnétique, etc., de l'Université Impériale à Odessa*, par A. Klossowsky. Odessa 1896, p. 35.

mités supérieure et inférieure de l'aiguille aimantée dans les diverses positions qu'on lui fait occuper :

	Extrémité supérieure.	Extrémité inférieure.
Cercle est, marque avant . .	A_α	A'_α
— ouest, — . .	B_α	B'_α
— ouest, marque arrière.	C_α	C'_α
— est, — .	D_α	D'_α

Voici un extrait du registre d'observations :

10 décembre 1904. — Heure, de $14^h\,52^m$ à $15^h\,25^m$.

Recherche du méridien magnétique.

	Marque avant.	Marque arrière.
Face sud. . .	35°18′	36°15′
	34 09	34 55
Face nord . .	32 30	31 57
	33 41	33 15
	33°54′5	34°05′5

Moyenne . . . 34°00′

Inclinaison.

Aiguille n° 1.

Pôle α incliné.			Pôle β incliné.		
A_α	A'_α	Moyenne.	A_α	A'	Moyenne.
65°10′	65°35′	65°22′5	65°13′	65°39′	65°26′0
B_α	B'_α		B_α	B'_α	
66°30′	66°11′	66 20 5	66°42′	66°24′	66 32 5
C_α	C'_α		C_α	C'_α	
65°00′	65°28′	65 14 0	65°19′	65°45′	65 32 0
D_α	D'_α		D_α	D'_α	
66°30′	66°12′	66 21 0	66°32	66°43′	66 22 5
		65°49′5			65°58′3

65°53′9

Aiguille n° 2.

Pôle α incliné.			Pôle β incliné.		
A_α	A'_α	Moyenne.	A_α	A'_α	Moyenne.
65°21′	65°46′	65° 33′ 5	64°54′	65°20′	65° 07′ 0
B_α	B'_α		B_α	B'_α	
66°36′	66°12′	66 24 0	66°48′	66°14′	66 31 0
C_α	C'_α		C_α	C'_α	
65°02′	65°26′	65 14 0	65°15′	65°44′	65 29 5
D_α	D'_α		D_α	D'_α	
66°51′	66°30′	66 40 5	66°28′	66°00′	66 14 0
		65°58′ 0			65°50′ 4

65°54′ 2

Inclinaison : 65° 54′ 1.

L'inclinaison a été déterminée à trois reprises différentes ; les nombres obtenus nous ont paru suffisamment concordants pour ne pas devoir multiplier les observations. Voici ces résultats :

	Inclinaison.		
Date.	Aiguille n° 1.	Aiguille n° 2.	Moyenne.
10 décembre 1904 . . .	65°53′ 9	65°54′ 2	65°54′ 1
19 janvier 1905	65 50 9	65 56 9	65 53 9
20 —	65 54 0	65 53 8	65 53 9

La moyenne de ces trois nombres 65° 54′ et les valeurs de la composante horizontale comprises dans le tableau page 22 ont servi à calculer les valeurs absolues de la composante verticale au moyen de la formule

$$Z = H tg i,$$

où Z représente la composante verticale, H la composante horizontale et i l'inclinaison de la force magnétique.

Ces valeurs sont renseignées dans le tableau suivant avec, en regard, les ordonnées correspondantes de la courbe de la balance et les températures de la cave.

Date.		Z	Ord.	t
			mm	
9 décembre 1904,	15h 41m . . .	0.42536	26 9	7°2
17 —	15 40 . . .	0.42562	26 0	7 1
27 —	15 07 . . .	0.42537	23 2	5 5
11 janvier 1905,	15 25 . . .	0.42556	19 5	4 5
24 —	16 00 . . .	0.42454	13 8	3 7
16 février 1905,	15 42 . . .	0.42568	26 0	7 5
18 —	15 44 . . .	0.42547	37 0	11 0
21 —	15 18 . . .	0.42578	38 0	11 1

La moyenne des valeurs de la composante verticale est 0.42542, celle des ordonnées 26.3 et celle des températures 7.2; nous pourrons donc écrire

$$0.42542 = Z_\beta - k \times 26.3 + c \times 7.2,$$

où z_β représente la valeur de la ligne de base de la balance à zéro degré de température, $k = 0.000055$ c. g. s. et $c = 0.000124$ c. g. s.

On en déduit

$$Z_\beta = 0.42598 \text{ à } 0° \text{ C}$$

ou

$$Z_\beta = 0.42722 \text{ à } 10° \text{ C}.$$

Nous pouvons encore déterminer une nouvelle valeur de la ligne de base de la balance du magnétographe à l'aide des valeurs de la composante horizontale contenues dans le tableau page 24. Dans le tableau suivant, nous avons écrit en regard de ces valeurs les ordonnées correspondantes de la courbe de la balance et les températures de la cave.

Date.		H	Ord.	t
10 février 1905.	. . .	0.190337	21.2	5.5
11 —	. . . .	0.190496	20.6	5.4
12 —	. . . .	0.190306	21.2	6.1
13 —	. . . .	0.190263	21.5	5.1
14 —	. . . .	0.190275	20.9	4.8
15 —	. . . .	0.190279	20.1	4.5
16 —	. . . .	0.190369	19.0	4.9
17 —	. . . .	0.190344	17.2	5.9
19 —	. . . .	0.190440	17.0	7.0
20 —	. . . .	0.190378	16.1	6.3
21 —	. . . .	0.190528	13.4	6.9
22 —	. . . .	0.190416	15.0	6.7
23 —	. . . .	0.190389	15.2	5.4
Moyennes	. . .	0.190371	18.34	5.65

L'équation qui détermine z_β s'écrira

$$0.190571 \times tgi = Z_\beta - k \times 18.34 + c \times 5.65.$$

En prenant pour i, k et c les valeurs renseignées précédemment, on trouve

$$Z_\beta = 0.42589 \text{ à } 0^\circ \text{ C}$$

ou

$$Z_\beta = 0.42713 \text{ à } 10^\circ \text{ C}.$$

On a adopté comme formule de réduction des ordonnées de la balance

$$Z = 0.42718 - 0.000055\, y + 0.000124(t - 10^\circ),$$

la valeur de la ligne de base étant la moyenne des deux nombres précédents à 10° C.

Nous n'avons pas utilisé les indications de la balance d'Edelmann à cause de son peu de sensibilité à cette époque et des faibles écarts qu'elle a donnés pendant la durée des expériences.

CALCUL DES ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES.

Nous donnons dans le tableau qui suit les moyennes horaires des éléments magnétiques déduits des courbes du magnétographe pour les mois de décembre 1904 et janvier 1905.

Les formules de réduction adoptées sont celles qui ont été établies précédemment. Nous les transcrivons à nouveau.

Formules de réduction des ordonnées des courbes du magnétographe.

Déclinomètre : $D = 12^\circ 52' 10'' + n \times 1'5$.

Bifilaire : $H = 0{,}19199 - 0{,}000065y + 0{,}000104\,(t - 10^\circ)$.

Balance : $Z = 0{,}42718 - 0{,}000055y + 0{,}000124\,(t - 10^\circ)$.

Moyennes horaires déduites des courbes du magnétographe.

Heure. Temps local 22m15s5 E. Gr.	DÉCEMBRE 1904.			JANVIER 1905.		
	D	H	Z	D	H	Z
1	13°13′25″	0.19039	0.42528	13°13′58″	0.19029	0.42537
2	14 13	40	28	14 29	28	37
3	14 11	41	28	15 01	30	37
4	14 22	44	28	14 53	32	36
5	14 22	45	28	14 49	33	36
6	13 49	45	28	14 26	34	37
7	13 52	45	28	14 14	35	37
8	13 40	43	27	14 10	34	37
9	13 49	41	26	13 56	30	35
10	14 39	37	25	14 36	26	35
11	13 38	35	25	15 45	20	35
Midi 12	16 20	35	27	17 02	17	35
13	16 33	36	29	18 06	22	36
14	16 10	38	35	17 59	24	40
15	15 33	38	32	17 09	28	42
16	15 10	37	32	16 32	28	43
17	14 52	40	33	15 29	26	43
18	14 23	40	32	14 57	28	43
19	13 46	42	32	14 56	24	43
20	13 17	43	32	13 51	24	43
21	12 39	41	31	12 31	28	42
22	13 14	42	30	12 58	27	41
23	12 55	40	29	13 04	28	39
Minuit 24	13 17	40	28	12 32	29	39
Moyennes. .	13°14′20″	0.190402	0.425291	13°14′53″	0.190276	0.425388

Les moyennes des mois de décembre 1904 et janvier 1905 fournissent les éléments magnétiques au 1er janvier 1905. On trouve ainsi :

Valeurs des éléments magnétiques au 1er janvier 1905.

Déclinaison . . . . . D = 13°14′37″.
Composante horizontale. . . H = 0.190339 c. g. s.
Composante verticale . . . Z = 0.425340 c. g. s.

TABLE DES MATIÈRES

DESCRIPTION DES INSTALLATIONS.

Pages.

Pavillon magnétique 3
Magnétographe de Mascart 4
Appareils de variation à lectures directes d'Edelmann 8
Appareils pour les déterminations absolues 11

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES DU 1er JANVIER 1905.

Constantes des appareils de variation : graduation et influence de la température 12
Observations absolues de la déclinaison; formules de réduction des déclinomètres 14
Observations absolues de la composante horizontale; formules de réduction des bifilaires 16
Observations absolues de l'inclinaison; formules de réduction des balances 25

CALCUL DES ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES.

Tableau des observations horaires et éléments magnétiques au 1er janvier 1905 30

AVIS.

Toutes les indications de temps sont données en temps local de l'Observatoire de Cointe, compté de 0 à 24 heures d'un minuit au minuit suivant.

Les coordonnées de l'Observatoire de Cointe sont :

Longitude . . . 22m15s5 à l'est de Greenwich.
Latitude . . . . 50°37'6".

DESCRIPTION

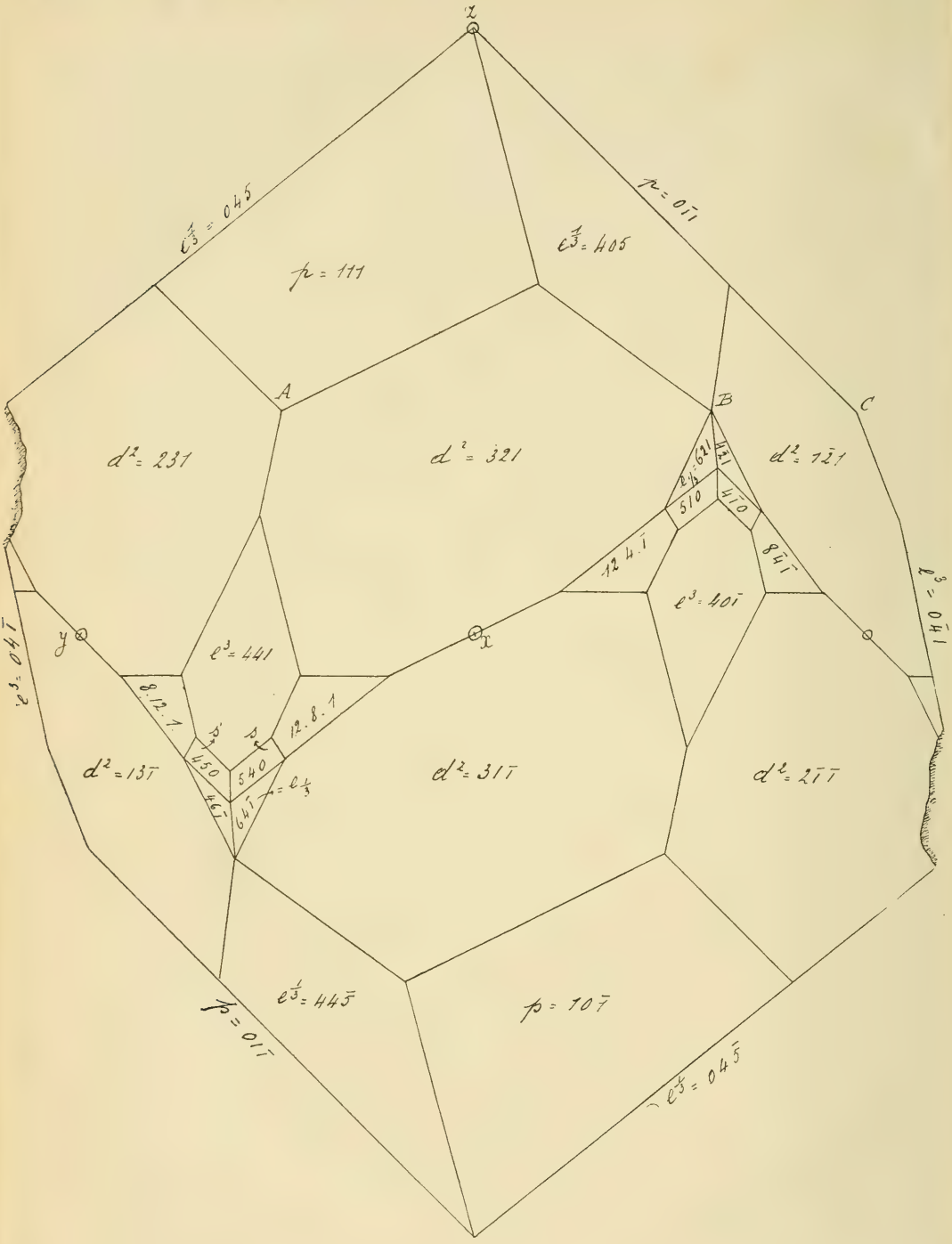
D'UN

CRISTAL DE CALCITE DU SIMPLON

PAR

Arthur ABRAHAM

RÉPÉTITEUR DE MINÉRALOGIE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE



Projection orthogonale sur le plan de symétrie $d^1 = 210$, perpendiculaire à l'axe binaire x.-

DESCRIPTION

D'UN

CRISTAL DE CALCITE DU SIMPLON

Ce cristal est remarquable par la présence du nouveau prisme dodécagonal

$$s = 540\ (*) = d^1 d^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{5}},$$

par l'ensemble rhomboédrique p, $e^{\frac{1}{5}}$ modifiant d^2, et par le développement de la zone $e_1 s e^{\frac{1}{5}} e^{\frac{1}{3}} p$ $(46\bar{1},\ 450,\ 441,\ 405,\ 0\bar{1}1)$, zone ayant pour équation :

$$5h = 4(k + l).$$

Les faces $e^{\frac{1}{3}}$ donnent des images d'une netteté remarquable; il en est de même de celles de la forme :

$$y = 12\,.\,8\,.\,1 = d^{\frac{1}{5}} d^1 b^{\frac{1}{7}};$$

(*) Une face supérieure du primitif étant placée devant le spectateur, nous prenons pour axe des x et des y les L^2 placés à droite et à gauche du spectateur, l'axe des z étant le A^3, de sorte que notre hkl équivaut dans la notation ordinairement employée à $k\,.\,h\text{-}k\,.\,\bar{h}\,.\,l$. Ainsi

$540 = 41\bar{5}0$
$321 = 21\bar{3}1$
$405 = 04\bar{7}5$, etc... (Voir la figure.)

Les faces du nouveau prisme sont petites et donnent des images satisfaisantes.

La figure représente le cristal en projection orthogonale sur le plan de symétrie $d^1 = 210$ perpendiculaire à l'axe x.

* * *

Rhomboèdre $e^{\frac{1}{5}}$ et *scalénoèdre* $d^{\frac{1}{5}}d^1b^{\frac{1}{7}}$. — Les mesures qui ont servi à déterminer ces formes sont réunies dans le tableau suivant :

ANGLES.		CALCULÉS.	MESURÉS.
$pe^{\frac{1}{5}}adj$	111 . 405	39°4′	39°6′
$pe^{\frac{1}{5}}$ sur a^1	111 . $\bar{4}\bar{4}5$	82°53′	82°55′
$e^{\frac{1}{5}}d^2$	405 . 321	44°6′	44°9′
yd^2	(12.8.1) 321	15°8′,5	15°12′
yp	(12.8.1) 111	43°15′	43°25′
yy sur p	(12.8.1) (8.12.1)	38°2′	38°38′
ye^5	(12.8.1) 441	20°44′	21°3′
yd^2 sur e^5	(12.8.1) 231	40°	40°15′

* * *

Prisme $s = 540 = d^{\frac{1}{5}}d^1b^{\frac{1}{5}}$. — Il a été déterminé par deux méthodes :

a) En partant de $\widehat{ss'} = \alpha = 21°30'$, $\widehat{ps} = \beta = 46°14'$. Si *hkl* est la notation demandée, on a :

$$\frac{h+k}{h-k} = \frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\omega\cos\varphi),$$

formule dans laquelle

$$\sin\varphi = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}, \quad \sin\omega = \frac{1}{2\sin\gamma},$$

γ étant l'angle $pd^1 = 52°32'30''$.

On obtient successivement

$$\varphi = 14°58'6''$$
$$\omega = 39°2'30''$$
$$\frac{h+k}{h-k} = 9{,}12295; \quad \text{d'où} \quad \frac{h}{k} = 1{,}246.$$

Si l'on désigne par i l'angle que fait le grand cercle vertical passant par le pôle s avec le grand cercle bissecteur de l'angle xy, on a :

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} 60° \frac{h-k}{h+k}; \quad \text{d'où} \quad i = 10°45'.$$

Comme cet angle est la moitié de l'angle α du biseau ss', il s'ensuit que le pôle de s se trouve sur le cercle d'horizon et que $l = 0$ (*).

Donc $s = 540$.

b) La face s' appartient à la zone $p = 0\bar{1}1$, $e^{\frac{1}{3}} = 405$, $e^5 = 441$, et comme $pe^{\frac{1}{3}} = 39°4'$, $e^{\frac{1}{3}}e^5 = 60°27'$ et que la mesure a donné $e^5 s' = 18°10'$, la relation des quatre faces en zone donne pour s' :

$$\frac{k-h}{h} = 0{,}2032 \quad \text{et} \quad \frac{h}{k} = \frac{4}{5}.$$

L'équation $5h = 4(k + l)$ de la zone en question donne alors $l = 0$, de sorte que :

$$s' = 450.$$

(*) Il est impossible de vérifier directement que l'arête du biseau ss' est verticale, parce que des quatre faces s existant sur le cristal, il n'y en a que deux qui soient réfléchissantes.

* * *

Scalénoèdre $e_{\frac{1}{3}} = 621$. — Dans la même zone, plus bas que la face prismatique 450, se trouve une petite facette faisant avec $e^{\frac{1}{3}}$ un angle de 92°12′ ; la relation des quatre faces en zone donne pour cette face :

$$\frac{k-h}{h} = 0{,}3365,$$

puis

$$\frac{h}{k} = \frac{2}{3} \quad \frac{l}{k} = -\frac{1}{6}$$

et

$$hkl = 46\bar{1}.$$

Cette forme se trouve mieux développée dans une autre région du cristal. On a pu, pour elle ainsi que pour le prisme, effectuer d'autres mesures relatées dans les tableaux qui suivent :

Angles relatifs au prisme $s = 540 = d^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{\infty}}$.

ANGLES.		CALCULÉS.	MESURÉS.
sp	540 . 111	46°24′	46°14′
ss′	540 . 450	21°47′	21°30′
sy	540 . (12.8.1)	9°51′,5	9°41′
se^{3}	540 . (441)	17°51′	18°10′

Angles relatifs au scalénoèdre $e_{\frac{1}{3}}$.

ANGLES.		CALCULÉS.	MESURÉS.
$pe_{\frac{1}{3}}$	111 . 621	49°3′	49°2′
$d^2e_{\frac{1}{3}}$	321 . 621	23°14′	22°50′ (*)
$ye_{\frac{1}{3}}$ en zone avec a^1	(12.8.1) (64$\bar{1}$)	16°19′	16°17′
$e_{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{1}{3}}$	621 . 405	43°44′	43°48′
$e_{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{1}{3}}$	46$\bar{1}$. 405	91°52′,5	92°12′

(*) Les faces d^2 et e^3 donnent des images peu précises.

RHOMBOÈDRES

DIRECT ET INVERSE

qui, modifiant un scalénoèdre, coupent ses arêtes culminantes en des points situés dans un même plan horizontal, les faces modifiantes partant d'un même point de l'axe ternaire

PAR

G. CESÀRO

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

RHOMBOÈDRES

DIRECT ET INVERSE

qui, modifiant un scalénoèdre, coupent ses arêtes culminantes en des points situés dans un même plan horizontal, les faces modifiantes partant d'un même point de l'axe ternaire.

La combinaison $d^2 p \dot{e}^{\frac{1}{3}}$ observée dans la calcite du Simplon a ceci de particulier, que les points A, B, C..., où le scalénoèdre est rencontré par les deux rhomboèdres, se trouvent dans un même plan horizontal (*).

Cette propriété existe non seulement pour la calcite, mais pour n'importe quelle substance rhomboédrique; on peut la généraliser : *Tout scalénoèdre* d^m *modifié par le primitif* p *et par le rhomboèdre* $e^{\frac{1}{m+1}}$, *issus d'un même point du* A^3, *a ses arêtes culminantes coupées en des points situés dans un même plan horizontal.* Ainsi, pour d^2, le rhomboèdre dont il s'agit est $e^{\frac{1}{3}}$; pour d^1, on trouve naturellement $e^{\frac{1}{2}}$, l'inverse de p.

Un scalénoèdre *hkl* jouit de la même propriété par rapport à p et à $e^{\frac{h-k}{k}}$; pour un isoscéloèdre ($h = 2k$), on trouve naturellement $e^{\frac{1}{2}}$ pour second rhomboèdre.

(*) Voir *Calcite du Simplon,* par Abraham (Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége).

Propriété générale. *Deux rhomboèdres, l'un direct,* 11u, *l'autre inverse,* 10s, *issus d'un même point du* Λ^3 *coupent en des points situés dans un plan horizontal les arêtes culminantes de tout scalénoèdre* hkl dans lequel

$$\frac{2h-k}{h+k}=\frac{u}{s}.$$

En effet, si nous ramenons les faces rhomboédriques à couper l'axe des z en un même point, pour obtenir les coordonnées de leurs points d'intersection avec les arêtes culminantes du scalénoèdre, on doit déterminer l'intersection des deux ensembles de faces :

$$s\,.\,s\,.\,us,\quad hkl,\quad khl$$
$$u\,.\,o\,.\,us,\quad hkl,\quad (h-k)\bar{k}l.$$

En égalant les z des points d'intersection, qui sont respectivement donnés par

$$\frac{z}{c}\{2l-(h+k)u\}=2-\frac{h+k}{s},$$

$$\frac{z}{c}\{2l-(2h-k)s\}=2-\frac{2h-k}{u},$$

on obtient

$$\frac{u}{s}=\frac{2h-k}{h+k}.$$

Exemple. Ainsi, les rhomboèdres $p=111$ et $e^{\frac{1}{3}}=405$ jouiront de la propriété dont il s'agit par rapport à tous les scalénoèdres de la série $32l$, série à laquelle appartient $d^2=321$.

CENTRE DE GRAVITÉ

DU

TRIANGLE SPHÉRIQUE

PAR

G. CESÀRO

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

CENTRE DE GRAVITÉ

DU

TRIANGLE SPHÉRIQUE

THÉORÈME I. *La projection de la droite qui joint le centre de gravité d'un triangle sphérique au centre de la sphère, sur le rayon aboutissant au sommet* A, *a pour expression*

$$x_0 = \frac{R}{4E} a \sin b \sin C,$$

formule dans laquelle R *est le rayon de la sphère,* 2E *l'excès sphérique du triangle considéré.*

L'axe des x étant le rayon OA (fig. 1), prenons les moments par rapport au plan diamétral perpendiculaire à ce rayon.

La surface AM comprise entre les arcs de grand cercle de longitude α et $\alpha + d\alpha$ étant

$$s = R^2 d\alpha (1 - \cos \beta),$$

on a, pour l'élément de surface,

$$ds = R^2 d\alpha \sin \beta d\beta$$

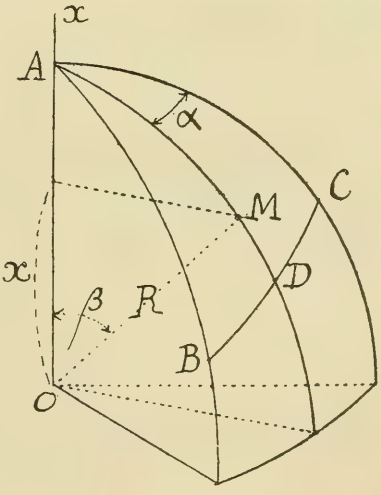


FIG. 1.

et, pour le moment élémentaire,

$$x\,ds = R^3 d\alpha \sin\beta \cos\beta d\beta.$$

L'intégration par rapport à β donne

$$\frac{R^3}{2}\, d\alpha (\sin^2\beta)_0^u = \frac{R^3}{2}\, d\alpha \sin^2 u,$$

formule dans laquelle u est la mesure de l'arc AD et

$$\cot u = \frac{\cos b \cos\alpha + \sin\alpha \cot C}{\sin b}.$$

On a donc, en désignant par S la surface du triangle sphérique,

$$Sx_0 = \frac{R^3}{2} \int_0^A \frac{d\alpha}{\sin^2 b + (\cos b \cos\alpha + \sin\alpha \cot C)^2}.$$

En divisant haut et bas par $\cos^2\alpha$, puis posant

$$\operatorname{tg}\alpha = z,$$

il vient

$$Sx_0 = \frac{\sin C}{\sin b} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{\sin C (\sin^2 b + \cot^2 C) z + \cos b \cos C}{\sin b} \right\}_0^{\operatorname{tg} A}$$

et, en observant que

$$\operatorname{arc\,tg} m - \operatorname{arc\,tg} n = \operatorname{arc\,tg} \frac{m-n}{1+mn},$$

$$Sx_0 = \frac{R^3}{2} \sin b \sin C \operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{\sin b \operatorname{tg} A}{\sin C + \cos b \cos C \operatorname{tg} A}$$

$$= \frac{R^3}{2} \sin b \sin C \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} a).$$

Comme

$$S = 2R^2 E,$$

$$x_0 = \frac{R}{4} \cdot \frac{a}{E} \sin b \sin C. \qquad (1)$$

Observation. Cette formule peut aussi s'écrire

$$x_0 = \frac{R}{4} \frac{a}{E} \sin h_a, \qquad (2)$$

en désignant par h_a la hauteur du triangle sphérique menée sur le côté a.

Théorème II. *Le centre de gravité d'un triangle sphérique s'obtient en portant, à partir du centre de la sphère, sur les rayons aboutissant aux sommets du triangle polaire, le demi-rayon multiplié par le rapport à l'excès sphérique du côté au plan duquel le rayon est perpendiculaire, et construisant le parallélipipède sur ces trois droites.*

Le centre de gravité est l'extrémité de la résultante ainsi obtenue.

En effet, si nous prenons pour axes coordonnées les normales OX, OY, OZ aux faces a, b, c du trièdre correspondant au triangle sphérique considéré, la *projection d'un rayon vecteur quelconque* OM sur l'arête OA du trièdre, projection que nous avons désignée par x (fig. 1), représentant la distance du point M au plan des YZ, et la coordonnée X du même point étant le segment de la parallèle à OX comprise entre M et le même plan, on a, en désignant par φ l'angle des droites OX, Ox,

$$x = \mathrm{X} \cos \varphi.$$

Or φ est le complément de la hauteur h_a du triangle sphérique, de sorte que

$$\mathrm{X} = \frac{x}{\sin h_a}.$$

Cette formule permet de passer des *projections* du rayon vecteur sur les arêtes du trièdre (2) aux *coordonnées* du centre de gravité par rapport aux arêtes du trièdre supplémentaire. Ces coordonnées sont

$$\mathrm{X}_0 = \frac{\mathrm{R}}{4} \cdot \frac{a}{\mathrm{E}}$$

$$\mathrm{Y}_0 = \frac{\mathrm{R}}{4} \cdot \frac{b}{\mathrm{E}}$$

$$\mathrm{Z}_0 = \frac{\mathrm{R}}{4} \cdot \frac{c}{\mathrm{E}}.$$

En observant que les angles des axes coordonnés sont $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, la distance du centre de gravité au centre de la sphère est donnée par

$$\delta_0 = \frac{R}{4E}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2ac\cos B - 2ab\cos C}.$$

Cas particulier. *Le centre de gravité du triangle trirectangle est le point milieu de la diagonale du cube construit sur les rayons aboutissant à ses sommets.*

Corollaire. Si l'on considère une suite de sphères ayant pour centre le sommet d'un trièdre, le lieu des centres de gravité des triangles déterminés sur ces sphères est une droite faisant avec les arêtes du trièdre des angles λ, μ, ν donnés par

$$\cos\lambda = \frac{x_0}{\delta_0}, \quad \cos\mu = \frac{y_0}{\delta_0}, \quad \cos\nu = \frac{z_0}{\delta_0}.$$

Ces formules fixent par rapport aux sommets du triangle le point où il est percé par le rayon passant par son centre de gravité.

Vérification. Prolongeons le côté a de manière à compléter la circonférence de grand cercle et, dans l'hémisphère ayant pour base ce cercle, prolongeons les côtés b, c jusqu'à la rencontre de la base. L'hémisphère est ainsi divisé en quatre triangles dont les triangles polaires ont pour sommet A′ commun le pôle de l'hémisphère. Si X est la distance du centre de gravité de l'hémisphère à sa base, le moment de sa surface par rapport à ce plan sera

$$M = 2\pi R^2 X.$$

D'autre côté, le moment du triangle ABC étant

$$SX_0 = \frac{1}{2}R^3 a,$$

les moments des trois autres triangles seront respectivement

$$\frac{1}{2}R^3a, \quad \frac{1}{2}R^3(\pi - a), \quad \frac{1}{2}R^3(\pi - a),$$

et, par conséquent,

$$M = \pi R^3.$$

Il s'ensuit que

$$X = \frac{R}{2},$$

propriété connue.

Applications. a) *Centre de gravité d'un polygone sphérique régulier de* n *côtés, inscrit dans un petit cercle de rayon sphérique* ρ.

Ce centre se trouve évidemment sur la droite qui joint le pôle du petit cercle au centre de la sphère, à une distance qui est la projection x_0 sur cette droite du rayon vecteur aboutissant au centre de gravité d'un des n triangles isoscèles égaux obtenus en faisant passer des arcs de grand cercle par le pôle du petit cercle et les sommets du polygone. La formule (1) donne :

$$x_0 = \frac{R}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\rho \cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\rho\cos^2\frac{\pi}{n}}} \cdot \frac{\operatorname{arc\,sin}\left(\sin\rho\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{2-n}{2n}\cdot\pi + \operatorname{arc\,tg}\cdot\frac{\cot\frac{\pi}{n}}{\cos\rho}} \cdot \qquad (4)$$

En faisant $\rho = \frac{\pi}{2}$, on obtient, quel que soit n,

$$x_0 = \frac{R}{2},$$

c'est le cas de l'*hémisphère*.

En supposant ρ constant et faisant $n = \infty$, on doit arriver au centre de gravité de la *zone* à une base.

Effectivement, la formule (4) devient (*) dans ce cas :

$$x_0 = \frac{R}{2}(1 + \cos\rho),$$

qui est bien la valeur de la coordonnée du point milieu de la hauteur de la zone.

b) *Centre de gravité d'un polygone sphérique quelconque.* Les résultats sont compliqués, mais on peut montrer comment l'emploi des formules (2) ramène la recherche à une simple question de trigonométrie.

On démontre d'abord facilement que si x, y, z sont les *projections* d'un rayon vecteur OM sur les rayons aboutissant aux sommets d'un triangle sphérique ABC, la longueur ρ du rayon vecteur est donnée par

$$\rho^2 = \frac{x^2}{\sin^2 h_a} + \frac{y^2}{\sin^2 h_b} + \frac{z^2}{\sin^2 h_c} - 2xy\frac{\cos C}{\sin h_a \sin h_b} - 2xz\frac{\cos B}{\sin h_a \sin h_c} - 2yz\frac{\cos A}{\sin h_b \sin h_c};$$

en outre, les angles que OM fait avec les rayons OA, OB, OC sont évidemment donnés par

$$\cos\lambda = \frac{x}{\rho}, \quad \cos\mu = \frac{y}{\rho}, \quad \cos\nu = \frac{z}{\rho}.$$

Ces formules détermineront donc la position d'un point M, lorsqu'on aura calculé les projections x, y, z du rayon vecteur OM sur les droites OA, OB, OC.

Supposons le polygone sphérique donné par ses côtés (fig. 2) $a_1, a_2, \ldots a_n$ et par ses diagonales $d_1, d_2, \ldots d_{n-3}$ issues du sommet A. Désignons par S la surface du polygone sphérique, par x la projection sur OA de la droite qui joint son centre de

(*) Le dernier facteur, apparemment indéterminé pour $n = \infty$, a pour vraie valeur

$$\frac{\sin\rho}{1 - \cos\rho}.$$

gravité au centre de la sphère, par (s_1, x_1), (s_2, x_2) ... les quantités analogues relatives aux triangles ABC, ACD ..., par $h_{A,p}$ la

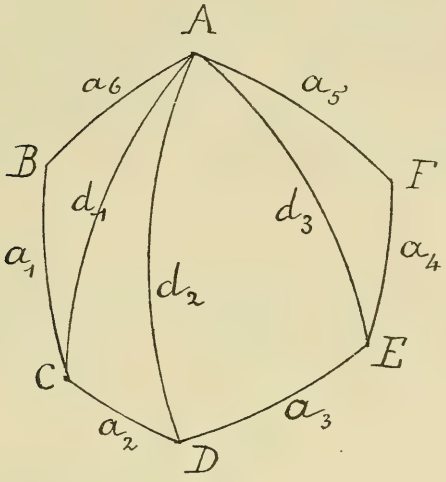


FIG. 2.

hauteur menée du sommet A sur le côté a_p; on a

$$Sx = \sum s_1 x_1 = \frac{R^3}{2} \sum_{p=1}^{p=n-2} a_p \sin h_{A,p};$$

et comme

$$S = \{ \Sigma(A) - (n-2)\pi \} R^2 = 2ER^2,$$

$$x = \frac{R}{4E} \sum_{1}^{n-2} a_p \sin h_{A,p}.$$

En partageant le polygone en triangles par des diagonales issues de B, puis de C, on aurait

$$y = \frac{R}{4E} \sum_{2}^{n-1} a_p \sin h_{B,p}$$

$$z = \frac{R}{4E} \sum_{3}^{n} a_p \sin h_{C,p}.$$

On voit facilement comment se calculent les quantités qui entrent dans ces formules, en fonction des données

$$a_1,\ a_2 \ldots a_n,\quad d_1 d_2, \ldots d_{n-3} :$$

les triangles ABC, ACD ... donneront 2E et les hauteurs de la forme $h_{A,p}$; quant aux $h_{B,p}$, on les déduira des diagonales issues de B, diagonales qui se calculent de proche en proche en commençant par BD, etc.

* * *

Fuseau. *Le centre de gravité d'un fuseau se trouve sur la droite qui joint son centre de figure au centre de la sphère, à une distance* x_0 *de ce dernier donnée par*

$$x_0 = \frac{\pi R}{4} \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi},$$

formule dans laquelle l'angle du fuseau est représenté par 2φ.

Onglet et pyramide sphérique. Les centres de gravité de ces volumes se déduisent immédiatement de la propriété générale presque évidente :

Le centre de gravité du volume compris entre une figure sphérique et les droites qui joignent son contour au centre de la sphère se trouve sur la droite qui joint le centre de gravité de la figure sphérique au centre de la sphère, aux trois quarts à partir de ce dernier point.

NOTE

Dans la démonstration du Théorème I, à cause de la simplicité du résultat et de la présence de a dans l'expression obtenue, on est amené à introduire comme variable (fig. 1 et 3) la mesure de CD $= \omega$. Dans la relation

$$Sx_0 = \frac{R^3}{2}\int \sin^2 u\, d\alpha,$$

éliminons u et α en les exprimant en fonction de ω.

On a d'abord

$$\frac{\sin u}{\sin C} = \frac{\sin \omega}{\sin \alpha}$$

et, par conséquent,

$$Sx_0 = \frac{1}{2} R^3 \sin^2 C \int \sin^2 \omega \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha};$$

mais, en différentiant l'équation

$$\cot \omega \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot \alpha,$$

il vient

$$\frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \omega = \frac{\sin b}{\sin C} d\omega;$$

donc

$$Sx_0 = \frac{1}{2} R^3 \sin b \sin C \int_{\omega=0}^{\omega=a} d\omega,$$

et, par conséquent,

$$x_0 = \frac{R}{4E} a \sin b \sin C.$$

* * *

La valeur de l'expression

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=A} \sin^2 u\, d\alpha$$

peut aussi être obtenue géométriquement.

En observant que dans un triangle sphérique

$$\sin a \,.\, \sin h_a = \sin b \,.\, \sin h_b,$$

le triangle élémentaire ADE (fig. 3) donnera, à la limite,

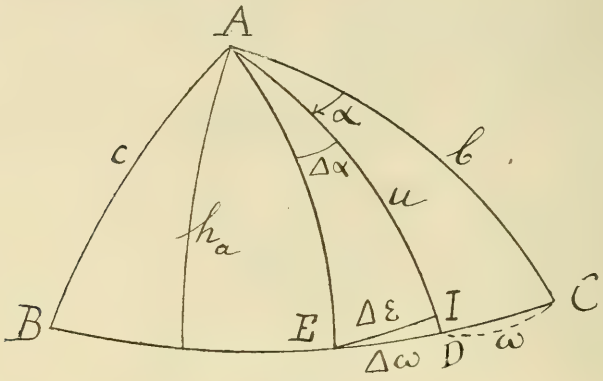


Fig. 3.

$$\sin u \,.\, d\varepsilon = \sin h_a \,.\, d\omega;$$

mais le triangle rectangle AEI donne, à la limite,

$$d\varepsilon = \sin u \,.\, d\alpha;$$

donc

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=A} \sin^2 u \, d\alpha = \sin h_a \int_{\omega=0}^{\omega=a} d\omega = a \sin h_a.$$

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE

À

TROIS REBROUSSEMENTS

PAR

M. A. GOB

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE HASSELT.

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE

À

TROIS REBROUSSEMENTS

L'hypocycloïde à trois rebroussements est ordinairement définie comme la trajectoire d'un point d'une circonférence de rayon R ou de rayon 2R qui roule à l'intérieur d'une circonférence de rayon 3R. La normale à la courbe passe par le point de contact du cercle mobile et du cercle fixe.

La plupart des propriétés de cette courbe remarquable découlent de sa génération tangentielle. Pour faciliter l'exposé de nos recherches, nous rappelons dans la première partie du présent mémoire les principales de ces propriétés et nous en indiquons la démonstration lorsqu'elle n'exige pas trop de développements. La deuxième partie traite de la droite de Simson sous un angle quelconque; nous y retrouvons des théorèmes établis autrement par MM. S. Kantor et A. Humbert, et nous y signalons aussi un grand nombre de résultats nouveaux. Enfin, la troisième partie a pour objet principal l'étude des ellipses tritangentes à une même hypocycloïde; ces coniques ont déjà été signalées par Crémona, Kantor, Fréchet, etc., mais il restait à en faire un examen approfondi; un grand nombre des propriétés que nous démontrons dans cette partie nous paraissent nouvelles.

Quant à la bibliographie, nous renvoyons le lecteur aux notices assez complètes de M. Brocard (*) et de M. Mackay (**).

Pour abréger le discours, nous remplacerons souvent les mots hypocycloïde à trois rebroussements par le symbole $\mathfrak{H}_3$ ou par le mot *hypocycloïde* tout court.

I. — Génération tangentielle. — Droite de Simson.

1. Lorsque deux points M, M′ se déplacent sur une circonférence (centre ω, rayon R) avec des vitesses respectives v, v' telles que $v' = -2v$, la droite MM′ enveloppe une $\mathfrak{H}_3$ (fig. 1); le point de contact N est symétrique de M′ par rapport à M.

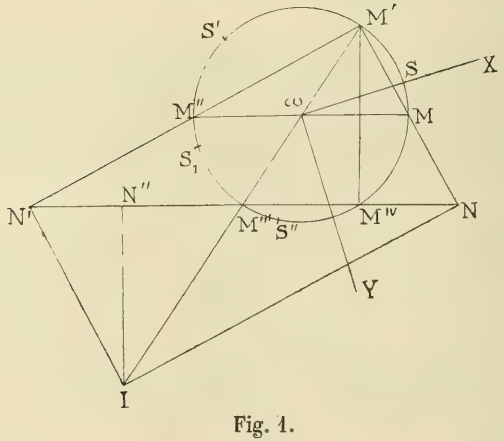


Fig. 1.

Soit S un point de la circonférence ω où les deux mobiles se rencontrent; nous considérons ce point comme la position initiale des deux mobiles. L'arc SM′ est double de l'arc SM, mais de sens contraire. Les mobiles se rencontrent encore en

(*) M. Brocard, *Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. III, 1896, pp. 166-168.

(**) M. Mackay, *Proceedings of the Edinburgh Math. Society*, vol. XXIII, 1904-1905, pp. 80-88.

deux autres points S′, S″, formant avec S les sommets d'un triangle équilatéral. Ces trois points S, S′, S″ sont appelés les SOMMETS de $\mathcal{C}_3$; la courbe y touche le cercle ω.

Appelons S_1, S_1', S_1'' les points du cercle ω qui sont diamétralement opposés à S, S′, S″; il est facile de voir que S_1S, $S_1'S'$, $S_1''S''$ sont trois positions de la droite MM′. Les points de contact de $\mathcal{C}_3$ avec ces diamètres de ω sont les symétriques de de S, S′, S″ par rapport à S_1, S_1', S_1'' : ce sont les POINTS DE REBROUSSEMENT de la courbe.

Nous convenons de dire que M est le *point primaire* de la tangente MM′ et que M′ en est le *point secondaire;* que la tangente MM′ est *primaire* par rapport à M et *secondaire* par rapport à M′. Pour obtenir toutes les tangentes de $\mathcal{C}_3$, il suffit de faire parcourir à M une fois toute la circonférence ω, le point M′ parcourt alors deux fois cette circonférence. Il résulte de là que de tout point de la circonférence ω on peut mener à $\mathcal{C}_3$ une tangente primaire et deux tangentes secondaires.

2. Ces trois tangentes présentent une disposition remarquable. En effet, soient M″, M‴ les points diamétralement opposés à M, M′ (fig. 1) et M^{IV} le symétrique M′ par rapport au diamètre MM″. Lorsque le point primaire parcourt la demi-circonférence MM′M″, le point secondaire parcourt en sens inverse la circonférence entière; lorsque le point primaire parcourt l'arc MM′, le point secondaire parcourt l'arc double $M'M^{IV}$. Par suite, *d'un point quelconque* M′ *du cercle tritangent* ω, *on peut mener à* $\mathcal{C}_3$ *deux tangentes rectangulaires* M′M, M′M″ (*secondaires en* M′) *et une tangente* $M'M^{IV}$ (*primaire en* M′) *qui est perpendiculaire au diamètre* MM″.

La droite $M^{IV}M'$ étant tangente secondaire en M^{IV}, sa perpendiculaire $M^{IV}M'''$ est également tangente à $\mathcal{C}_3$; la droite $M^{IV}M'''$ rencontre M′M et M′M″ en deux points N et N′, qui sont les symétriques de M′ par rapport à M et M″; ces points sont donc les points de contact des tangentes M′M et M′M″.

D'après cela, *une tangente quelconque* NN′ *à* $\mathcal{C}_3$ *rencontre la courbe en deux points* N *et* N′, *tels que les tangentes en ces points*

sont rectangulaires et se coupent sur le cercle ω*; la distance* NN′ *est égale à* 4R *et son milieu* M‴ *appartient au cercle tritangent* ω.

Les normales en N et N′ se coupent en un point I du diamètre M′ω, et l'on a M′M″ = M‴I d'où ωI = 3R. Le point de contact N″ de NN′ avec $\mathcal{G}\mathcal{C}_3$ est le symétrique de M^{iv} par rapport à M‴; c'est aussi la projection de I sur NN′.

3. L'angle SωM, que nous désignons par θ, détermine complètement la tangente MM′; nous l'appelons *angle directeur* de MM′. Cette droite fait avec ωS un angle égal à $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$; si l'on prend pour axes coordonnés ωS et le diamètre perpendiculaire, elle a pour équation

$$x\cos\frac{\theta}{2} - y\sin\frac{\theta}{2} = \mathrm{R}\cos\frac{3\theta}{2}.$$

De cette équation, nous déduisons les équations de la courbe en coordonnées tangentielles et en coordonnées ponctuelles :

$$u^2 + v^2 + \mathrm{R}u(3v^2 - u^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 8\mathrm{R}x^3 - 24\mathrm{R}xy^2 + 18\mathrm{R}^2(x^2 + y^2) - 27\mathrm{R}^4 = 0.$$

Ces équations montrent que $\mathcal{G}\mathcal{C}_3$ *est une quartique de la troisième classe, bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques. Elle est complètement déterminée par quatre tangentes.*

L'angle de deux tangentes à $\mathcal{G}\mathcal{C}_3$ est égal à la demi-différence de leurs angles directeurs. De là résulte cette autre façon de présenter la génération tangentielle :

Lorsqu'un rayon d'une circonférence ω *tourne avec la vitesse angulaire* w, *et qu'une droite attachée à son extrémité tourne en même temps avec la vitesse angulaire* $-\frac{1}{2}$w *ou* $\frac{1}{4}$w, *cette droite enveloppe une* $\mathcal{G}\mathcal{C}_3$.

4. Si sur MM′ on construit un triangle MM′α de forme invariable, le lieu du sommet α est une hypotrochoïde de module $-\frac{1}{3}$. En particulier, deux points de la droite MM′ décrivent des hypocycloïdes; ces points sont le symétrique N de M′ par

rapport à M, qui, ainsi qu'on l'a observé ci-dessus (1), parcourt l'enveloppe de MM′, et le point qui divise MM′ additivement dans le rapport 1 : 2; ce dernier point décrit une $\mathfrak{G}_3$, qui est une développante de l'hypocycloïde décrite par N. Les droites $M\alpha$, $M'\alpha$, qui ont des inclinaisons constantes sur MM′, enveloppent des hypocycloïdes.

5. Soit ABC un triangle quelconque (fig. 2); appelons H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit, ω le centre du cercle des neuf points, (A_1, B_1, C_1) les pieds des hauteurs, (A_2, B_2, C_2) les milieux des côtés. Les projections A′, B′, C′ d'un

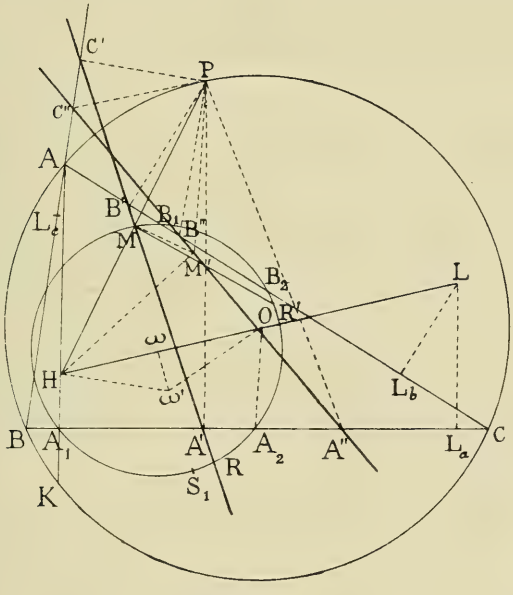


Fig. 2.

point quelconque P de la circonférence ABC sur les côtés sont situés sur une même droite *d*, appelée *droite de Wallace, droite de Simson ou pédale de* P; cette droite rencontre PH en son milieu M, point du cercle d'Euler ω. Les angles AC′B′, APB′ étant constamment égaux, la vitesse angulaire de la droite B′C′,

changée de sens, est constamment égale à celle de AP, ou à la moitié de celle du rayon OP, ou encore à la moitié de celle de la parallèle ωM à ce rayon. Par conséquent (3), la droite d enveloppe une $\mathfrak{H}_3$ tritangente au cercle d'Euler de ABC et M est son point primaire (*).

Si l'on suppose P en A, B, C, d se confond avec AA_1, BB_1, CC_1; donc les hauteurs de ABC sont des tangentes à $\mathfrak{H}_3$, ayant pour points primaires les milieux des distances HA, HB, HC.

Lorsque P coïncide avec la seconde extrémité de l'un des diamètres AO, BO, CO du cercle O, d se confond avec BC, CA ou AB; donc les côtés de ABC sont des tangentes à $\mathfrak{H}_3$ ayant pour points primaires A_2, B_2, C_2. Les points de contact de ces côtés avec $\mathfrak{H}_3$ sont les symétriques L_a, L_b, L_c de A_1, B_1, C_1 par rapport à A_2, B_2, C_2. Les normales en ces points concourent en un point L, qui est le symétrique de H par rapport à O. Les droites AL_a, BL_b, CL_c concourent en un point L', qui est le réciproque de H dans le triangle ABC, et aussi l'anticomplémentaire du point Lemoine, car L_a, L_b, L_c sont les milieux des hauteurs du triangle anticomplémentaire formé par les parallèles menées à BC, CA, AB par les sommets A, B, C.

Il existe donc une conique ε qui touche les côtés du triangle ABC, et, par suite, $\mathfrak{H}_3$ en L_a, L_b, L_c. Si l'on considère L_aB, L_aC comme deux tangentes infiniment voisines menées de L_a à ε, le centre de cette conique doit se trouver sur la droite joignant les milieux des diagonales BC, AL_a du quadrilatère circonscrit ABL_aC; cette droite est évidemment A_2O; donc le centre de ε est le point O.

Nous reviendrons plus loin sur ces coniques tritangentes à $\mathfrak{H}_3$.

6. Une hypocycloïde $\mathfrak{H}_3$ étant donnée, il existe une double infinité de triangles ABC des droites de Simson desquels elle est l'enveloppe. En effet, soient (fig. 2) CA, CB deux tangentes

(*) Ce théorème est dû à Steiner. L'hypocycloïde enveloppe des droites de Simson d'un triangle est souvent désignée sous le nom d'*hypocycloïde de Steiner* de ce triangle.

quelconques à $\mathfrak{G}_3$; en leurs points secondaires B_1, A_1, on peut mener deux autres tangentes B_1B, A_1A, qui leur sont perpendiculaires. Si B_2, A_2 sont les points primaires des tangentes CA, CB, l'arc A_2B_2 du cercle tritangent à $\mathfrak{G}_3$ est la moitié de l'arc $A_1C_1B_1$; il résulte de là que l'angle BCA est égal à A_2B_1C et que, par suite, l'angle A_2B_1B est égal à CBB_1, donc $A_2B_1 = A_2C = A_2B$. Par conséquent, le cercle tritangent passant par les pieds de deux hauteurs et le milieu d'un côté du triangle ABC se confond avec le cercle d'Euler; il résulte de là que $\mathfrak{G}_3$ est l'enveloppe des pédales d du triangle ABC.

Nous convenons de désigner les triangles ABC de cette espèce sous le nom de *triangles principaux* circonscrits à $\mathfrak{G}_3$. Pour les obtenir, on pourrait prendre arbitrairement l'orthocentre H; les tangentes issues de ce point sont les hauteurs du triangle principal correspondant.

7. Cherchons la relation entre les angles directeurs des côtés du triangle principal ABC.

Un sommet S_1 de $\mathfrak{G}_3$ divise l'arc A_2A_1 du cercle tritangent dans le rapport 1 : 2 (fig. 2). Les angles directeurs de BC, CA, AB ont respectivement pour mesure les arcs S_1A_2, $S_1A_2B_2$, $S_1A_2B_2C_2$ de ce cercle; la somme de ces arcs est égale à $3S_1A_2 + 2A_2B_2 + B_2C_2$ ou à $3S_1A_2 + A_2B_2 + C_2A_1 + B_2C_2$, c'est-à-dire à la circonférence ω. Ainsi la somme des angles directeurs des côtés d'un triangle principal est égale à $2k\pi$.

Les angles directeurs des hauteurs AH, BH, CH étant égaux à ceux des côtés BC, CA, AB augmentés ou diminués de π, *la somme des angles directeurs des trois tangentes issues d'un même point* H *est égale à un multiple impair de* π.

II. — Pédales obliques.

8. Les notations étant les mêmes qu'au § 5, faisons tourner les projetantes PA′, PB′, PC′ d'un même angle α autour de P; soient A″, B″, C″ les points où ces droites viennent rencontrer BC, CA, AB (fig. 2). Les points A″, B″, C″ sont situés sur

une même droite d_α, que nous appellerons *droite de Simson d'angle* $\frac{\pi}{2} - \alpha$, ou simplement *pédale oblique* de P.

Lorsque le point P *se déplace sur la circonférence* ABC, *la pédale* d_α *enveloppe une* $\mathfrak{BG}_3$. Bien que ce théorème soit connu, nous en donnons ici une démonstration, peut-être inédite, qui nous a été communiquée par M. Neuberg; elle nous sera utile pour établir de nouvelles propriétés.

La droite $A'B'C' \equiv d$ rencontre HP en son milieu M, sur la circonférence ω. On passe de d à d_α en faisant tourner de l'angle α les rayons vecteurs allant de P aux différents points de d et en les multipliant ensuite par séc α. La même transformation fait correspondre au point M de d un certain point M' de d_α. Construisons sur tous les rayons vecteurs allant de H aux différents points de la circonférence ω des triangles directement semblables à HMM' (ou inversement semblables à PA'A''); les troisièmes sommets de ces triangles ont pour lieu géométrique une circonférence dont le centre ω' s'obtient en construisant le triangle $H\omega\omega'$ semblable à HMM' et dont le rayon est égal à R séc α, R désignant le rayon du cercle ω. Cela posé, lorsque P parcourt la circonférence O, la droite d tourne avec une vitesse angulaire égale à la moitié de celle du rayon ωM, mais de sens contraire (5); la même relation existe entre les vitesses angulaires des droites d_α et ω'M', qui font un angle constant α avec d et ωM'. Il résulte de là que d_α enveloppe une $\mathfrak{BG}_3$ tritangente au cercle ω'; nous désignerons cette courbe par $\mathfrak{BG}_\alpha$, l'enveloppe de la droite d étant désignée par $\mathfrak{BG}$.

Désignons par AA'_1, BB'_1, CC'_1 les droites qu'on obtient en faisant tourner les hauteurs AA_1, BB_1, CC_1 de l'angle α autour de A, B, C; ces droites (non indiquées sur la figure) sont les positions de d_α lorsque P est en A, B ou C. Les côtés BC, CA, AB sont également des positions particulières de d_α; par exemple, AC est la pédale du point de rencontre des parallèles menées à PA'' et PC'' respectivement par C et par A.

9. Les courbes $\mathfrak{BG}$ et $\mathfrak{BG}_\alpha$ sont semblables; nous allons examiner par quelle transformation on peut ramener $\mathfrak{BG}_\alpha$ à $\mathfrak{BG}$.

Pour faire coïncider les cercles tritangents ω' et ω, nous faisons tourner de l'angle α autour de H la figure formée par $\mathfrak{G}_\alpha$ et le triangle ABC, et nous multiplions par cos α les rayons vecteurs allant de H aux différents points de cette figure. Le point M' vient coïncider avec M et la droite M'A'' ayant tourné de l'angle α fait maintenant avec MA'R l'angle 2α; soit MR' sa nouvelle position. La courbe $\mathfrak{G}_\alpha$ s'est transformée en une courbe $\mathfrak{G}'_\alpha$ égale à $\mathfrak{G}$. Il reste à faire tourner $\mathfrak{G}'_\alpha$ autour de ω d'un angle tel que les sommets de ces courbes coïncident. Or un sommet S_2 de $\mathfrak{G}$ divise l'arc MB_2R dans le rapport 1 : 2 et un sommet S'_2 de $\mathfrak{G}'_\alpha$ divise dans le même rapport l'arc MB_2R'; donc l'arc S'_2S_2 est le tiers de l'arc $R'A_2R$, et comme l'angle $RMR' = 2\alpha$, l'angle $S'_2\omega S_2 = \frac{4\alpha}{3}$.

D'après cela, $\mathfrak{G}_\alpha$ se ramène à $\mathfrak{G}$ à la suite de trois transformations : 1° multiplication des rayons vecteurs issus de H par cos α; 2° rotation de l'angle α autour de H; 3° rotation de l'angle $\frac{4\alpha}{3}$ autour de ω, de sens contraire à la précédente. Ces opérations changent le triangle ABC circonscrit à $\mathfrak{G}_\alpha$ en un triangle *abc* circonscrit à $\mathfrak{G}$ dont les côtés sont égaux à BC cos α, AC cos α, AB cos α et font avec BC, CA, AB l'angle $\frac{\alpha}{3}$.

10. Les considérations qui précèdent entraînent de nombreuses conséquences.

Étant donnés l'hypocycloïde $\mathfrak{G}$ et le triangle principal ABC, si l'on fait varier l'angle α, on obtient une série d'angles *abc* circonscrits à $\mathfrak{G}$ et semblables à ABC. Le rapport de similitude de *abc* et ABC est égal à cos α. Donc :

Si les côtés d'un triangle abc circonscrit à une $\mathfrak{G}_3$ *et semblable au triangle principal* ABC *font avec les côtés correspondants de ce triangle l'angle* $\frac{\pi}{2} - \theta$, *cette* $\mathfrak{G}_3$ *est l'enveloppe des pédales* $d_{3\theta}$ *du triangle abc; le rapport de similitude des triangles abc,* ABC *est égal à* sin 3θ. *Les troisièmes tangentes menées à* $\mathfrak{G}_3$ *par les sommets a, b, c font avec les côtés opposés l'angle* $\frac{\pi}{2} - 3\theta$, *et, par suite, sont les côtés d'un triangle circonscrit à* $\mathfrak{G}_3$ *et semblable à* ABC.

Comme sin 3θ reprend la même valeur absolue quand on

remplace θ par $-\theta$, $60^\circ \pm \theta$ ou $120^\circ \pm \theta$, on a la proposition suivante :

On peut construire six triangles directement égaux à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$ et circonscrits à une $\mathfrak{GC}_3$, à la condition toutefois que le rayon du cercle $\alpha\beta\gamma$ soit inférieur au diamètre du cercle tritangent. Ces six triangles se partagent en deux groupes : les côtés homologues des trois triangles d'un même groupe font entre eux des angles égaux à 120° et les côtés homologues de deux triangles correspondants appartenant à des groupes différents font des angles égaux et de sens contraires avec le côté homologue du triangle principal semblable à $\alpha\beta\gamma$.

Remarquons aussi que *la somme des surfaces de deux triangles semblables circonscrits à une $\mathfrak{GC}_3$, et dont les côtés homologues font entre eux des angles égaux à 90° ou à $\pm 30^\circ$ est égale à la surface du triangle principal semblable à ces triangles.*

11. Cherchons les positions de l'orthocentre *h* et du centre *o* du cercle circonscrit relatifs à un triangle *abc* circonscrit à $\mathfrak{GC}$ et semblable au triangle principal ABC.

A cet effet, appliquons à HO les trois transformations successives qui changent $\mathfrak{GC}_\alpha$ en $\mathfrak{GC}$ et ABC en *abc* (fig. 2). La droite HO doit d'abord tourner autour de H de l'angle α et devenir égale à HO cos α; donc elle deviendra la corde HI qui dans le cercle de diamètre HO (fig. 3) fait avec HO l'angle α. Elle doit ensuite tourner autour de ω, dans le sens opposé, de l'angle $\frac{4\alpha}{3}$; donc si *ho* est sa position définitive, l'angle $H\omega h = \frac{4\alpha}{3}$ et l'angle $O\omega O = \frac{2\alpha}{3}$. En rapprochant ces conclusions des §§ 2, 3, 4, on peut énoncer la proposition suivante:

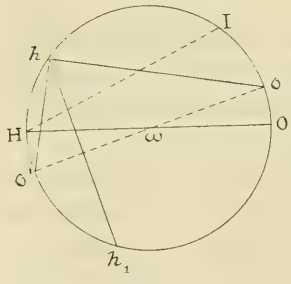


Fig. 3.

Si un triangle abc se déplace en restant semblable à lui-même et circonscrit à une même $\mathfrak{GC}_3$, le centre o et l'orthocentre h décrivent une même circonférence; la droite d'Euler oh enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements $\mathfrak{GC}'$; le centre de gravité

de abc décrit une $\mathfrak{H}_3$ *qui est une développante de* $\mathfrak{H}'$; *enfin, tout point invariablement lié à abc décrit une hypotrochoïde de module* $-\frac{1}{3}$ (*).

12. Soit o' le point diamétralement opposé à o sur la circonférence de diamètre HO (fig. 3), et soit hh_1 la corde perpendiculaire au diamètre OO'. Les droites ho, ho', hh_1 sont tangentes à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}'$; ce sont les droites d'Euler de trois triangles abc, $a'b'c'$, XYZ circonscrits à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}$ et semblables au triangle principal ABC. Les deux premiers triangles ont même orthocentre h et les centres de leurs cercles circonscrits sont les points o et o'; le triangle XYZ a pour orthocentre h_1 et le centre de son cercle circonscrit est le point h. Je dis que ce triangle est circonscrit à la fois aux deux triangles abc, $a'b'c'$. En effet, les troisièmes tangentes menées des points a, b, c à $\mathfrak{H}$ forment un triangle X'Y'Z' semblable à abc; or les distances ha, hb, hc, doubles des distances de o aux côtés du triangle abc, sont aussi proportionnelles aux distances de h aux côtés du triangle X'Y'Z', ces côtés faisant respectivement un même angle avec les hauteurs ha, hb, hc; donc h est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle X'Y'Z', et, par suite, ce triangle coïncide avec XYZ. On verrait de même que ce triangle XYZ est circonscrit au triangle $a'b'c'$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème qui résulte de là, ainsi que sa réciproque.

13. Lorsque $hh_1 = oh$, les triangles XYZ et abc sont égaux. Alors l'angle $hoo' = 30°$, et comme l'arc $Hh = 2Oo = 2Ho'$, on voit que l'arc $Hh = 40°$, $Oo = 20°$, donc ho fait avec HO un angle de 10° et l'angle de h_1h avec HO est égal à 110°. Donc *si les côtés de deux triangles semblables circonscrits à une* $\mathfrak{H}_3$ *font avec les côtés homologues du triangle principal qui leur est semblable des angles respectivement égaux à* — 10° *et à* 110°, *ces triangles sont égaux, et le premier est inscrit au second.*

(*) Ce théorème constitue la question 1133 que nous avons proposée dans *Mathesis* (1897, p. 214) et qui n'a pas encore reçu de solution.

14. Soient L'_a, L'_b, L'_c (fig. 4) les points de contact des côtés du triangle ABC avec l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_\alpha$ enveloppe des pédales d_α de ce triangle. Menons la corde CP du cercle ABC qui fait avec AC l'angle $ACP = \frac{\pi}{2} - \alpha$; BC est la pédale d_α du point P et PL'_a fait avec BC l'angle $PL'_a B = \frac{\pi}{2} - \alpha$; la parallèle AQ menée par A à PL'_a est la troisième tangente issue de A. Menons par P une parallèle à BC rencontrant AQ en Q'; on a

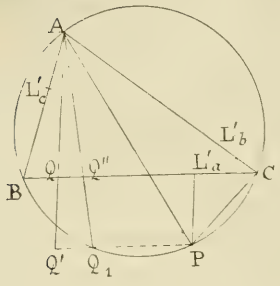


Fig. 4.

$$\frac{PQ'}{AP} = \frac{\sin Q'AP}{\sin Q'} = \frac{\sin APL'_a}{\sin AQC} = \frac{\sin (B - C)}{\sin ACP}.$$

Or, si R désigne le rayon du cercle ABC, $AP = 2R \sin ACP$; donc

$$QL'_a = PQ' = 2R \sin (B - C).$$

De cette égalité, on déduit les théorèmes suivants :

Si un triangle isoscèle ABC *est circonscrit à une* $\mathfrak{H}_3$, *la troisième tangente menée par* A *passe par le point de contact de* BC *avec* $\mathfrak{H}_3$.

Si une $\mathfrak{H}_3$ *varie en restant inscrite à un triangle invariable, la distance comprise entre le point de contact d'un côté et le point où ce côté rencontre la troisième tangente menée par le sommet opposé est constante.*

Si ABC est équilatéral et que $\alpha = 30°$, les points P et L'_a coïncident avec B et $\mathfrak{H}_\alpha$ touche BC, CA, AB en B, C, A. Les côtés du triangle ABC font alors avec les côtés du triangle principal qui lui est semblable, c'est-à-dire avec les tangentes aux sommets, des angles égaux à $\pm 10°$ (**10**). Donc *on peut construire deux triangles équilatéraux* ABC *à la fois inscrits et circonscrits à une* $\mathfrak{H}_3$, *les côtés* BC, CA, AB *touchant* $\mathfrak{H}_3$ *en* B, C, A. *Les côtés de ces triangles font des angles égaux à* $\pm 10°$ *avec les tangentes aux sommets de* $\mathfrak{H}_3$.

15. Soient Q_1 (fig. 4) le point où PQ′ rencontre le cercle ABC et Q″ le point de rencontre de AQ_1 avec BC. L'angle $AQ''B = AQ_1Q' = ACP = \frac{\pi}{2} - \alpha$; donc Q″ et L'_a sont isotomiques sur BC et la droite AQ″ est la symétrique de AQ par rapport à la hauteur AA_1 et l'isogonale de AP par rapport à l'angle BAC.

On conclut de là que les droites AL'_a, BL'_a, CL'_c ne sont pas en général concourantes, car si elles l'étaient, il en serait de même de AQ″ et des droites analogues menées par B et C. Or trois droites menées par A, B, C et faisant le même angle α avec les hauteurs du triangle ne peuvent être concourantes que si $\alpha = 0$. Donc il n'existe de conique touchant les côtés du triangle et par suite l'hypocycloïde en L'_a, L'_b, L'_c que si le triangle ABC est principal. En d'autres termes, *les tangentes menées à une* $\mathfrak{HC}_3$ *aux points où cette courbe est touchée par une conique tritangente sont toujours les côtés d'un triangle principal.*

Nous verrons plus loin que ces coniques tritangentes sont toujours des ellipses.

III. — Ellipses tritangentes.

16. Sur une circonférence de centre O et de diamètre $BC = 2a$ (fig. 5), prenons un point fixe A et un point variable L. Soient F et E les projections de ces points sur BC, A′ et L′ leurs symétriques par rapport à BC, D et ω les milieux de la corde AL et du rayon OA. Le cercle d'Euler du triangle rectangle ABC a pour centre ω et passe par les points A, D, F, O.

La droite DE, droite de Simson du point L par rapport au triangle ABC, enveloppe une hypocycloïde K_A tritangente au cercle ω. D'ailleurs, on peut observer que les vitesses angulaires des droites AL, AL′ étant égales et de signes contraires, celle de DE, parallèle à AL′, est égale et de sens contraire à la moitié de celle de OL, ou encore de celle de ωD.

Cela posé, réduisons l'ordonnée EL dans le rapport $b : a$, b étant une longueur donnée plus petite que a, c'est-à-dire supposons $ME : LE = b : a$. Le point M décrira une ellipse ε ayant

pour axes $2a$ et $2b$. Menons encore par M une parallèle à AL′ rencontrant AL en D′. On a

$$AD' : AD = ML' : EL' = a + b : a.$$

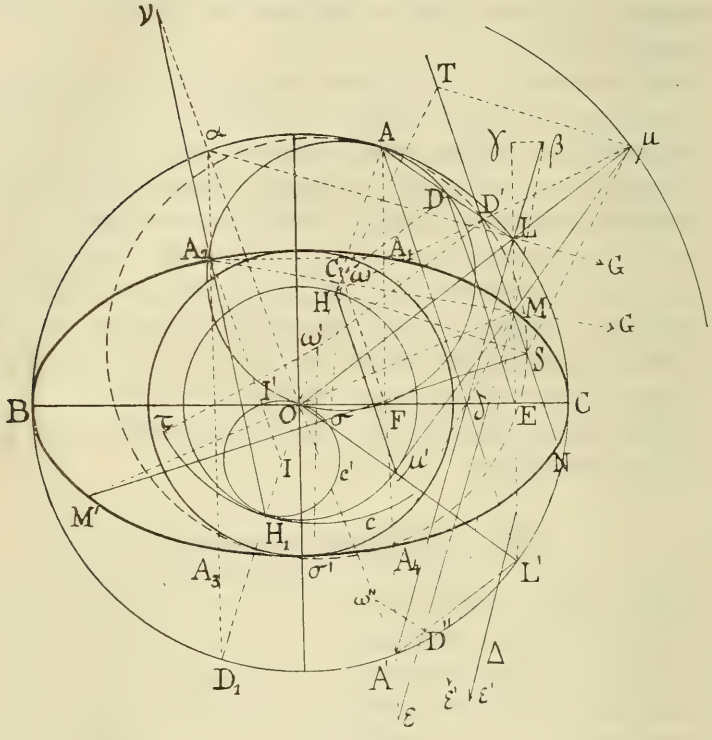


Fig. 5.

Il résulte de là que la droite MD′ enveloppe une hypocycloïde $\mathcal{H}_A$ homothétique à K_A par rapport à A, le rapport de similitude étant $a + b : a$. Le cercle tritangent à $\mathcal{H}_A$ aura son centre ω′ en un point de AO tel que

$$A\omega' : A\omega = a + b : a, \quad \text{d'où} \quad A\omega' = \frac{1}{2}(a + b), \quad O\omega' = \frac{1}{2}(a - b);$$

on voit facilement que ce cercle touche le cercle donné O et le cercle secondaire de ε, ce dernier intérieurement.

Semblablement, la parallèle menée par E à A'L enveloppe une hypocycloïde K'_A symétrique de K_A par rapport à BC. La parallèle menée par M à A'L enveloppe une hypocycloïde $\mathfrak{H}'_A$ homothétique de K'_A par rapport à A', le rapport de similitude étant $a - b : a$. Le cercle tritangent à $\mathfrak{H}'_A$ a pour rayon $\frac{1}{2}(a - b)$ et son centre ω'' partage OA' en deux segments $O\omega'' = \frac{1}{2}(a + b)$, $A'\omega'' = \frac{1}{2}(a - b)$; il touche le cercle donné et le cercle secondaire de ε, ce dernier extérieurement. Ainsi :

Si autour d'un point M, *mobile sur la circonférence d'une ellipse* ε, *deux droites* MD' *et* MD'' *tournent, la première avec une vitesse angulaire égale et la seconde avec une vitesse angulaire égale, mais de sens contraire, à la moitié de celle du rayon* OL *allant du centre de* ε *au point* L *du cercle principal qui correspond au point* M, *ces droites enveloppent deux hypocycloïdes* $\mathfrak{H}_A$ *et* $\mathfrak{H}'_A$, *dont les cercles tritangents touchent à la fois le cercle principal et le cercle secondaire de* ε.

La droite MD' rencontre ε en un second point N; nous convenons de dire que M est le point *primaire* et N le point *secondaire* de la tangente MN; que la droite MN est *primaire* en M et *secondaire* en N. Ces dénominations, qui sont les mêmes que pour les points de rencontre avec le cercle tritangent, ne peuvent prêter ici à confusion, parce qu'elles s'entendent toujours pour l'ellipse, si le contraire n'est pas dit formellement. Des dénominations analogues sont employées pour la tangente MD'' à $\mathfrak{H}'_A$.

17. Un sommet σ de K_A divise l'arc OF du cercle tritangent ω dans le rapport 1 : 2; nous prendrons pour angle directeur de la tangente DE à K_A l'angle $\sigma\omega D = \theta$; c'est aussi l'angle directeur de la tangente MD' à $\mathfrak{H}_A$, les deux courbes étant homothétiques. Désignons par α et λ les angles EOA, EOL, nous aurons

$$O\omega\sigma = \frac{1}{3} O\omega F = \frac{2}{3} OAF = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

$$\theta = \pi - O\omega\sigma - A\omega D = \pi - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - (a - \lambda),$$

d'où

$$\theta = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ainsi, *l'angle directeur d'une tangente à* $\mathcal{H}_A$ *ne diffère que par une constante de l'anomalie de son point primaire sur* ε.

La relation (1) subsiste également pour les tangentes à $\mathcal{H}'_A$, pourvu qu'on y remplace α et λ par les anomalies $-\alpha$, $-\lambda$ des points A', L', et que θ soit compté à partir d'un axe de $\mathcal{H}'_A$.

Comme conséquence de la relation (1), observons que *l'angle de deux tangentes de* $\mathcal{H}_A$ (*ou de* $\mathcal{H}'_A$) *est égal à la demi-différence des anomalies de leurs points primaires.* En particulier, *les tangentes primaires menées à* $\mathcal{H}_A$ (*ou à* $\mathcal{H}'_A$) *par deux points diamétralement opposés de* ε *sont rectangulaires et se coupent sur le cercle tritangent à l'hypocycloïde.*

18. Soient α, D_1, A' les points symétriques de A par rapport au petit axe de ε, au centre O et au grand axe BC, et soient A_1, A_2, A_3, A_4, les points de ε qui correspondent aux points A, α, D_1, A' du cercle principal.

Quand on suppose L successivement en A, α, D_1 et A', on trouve que la tangente primaire menée à $\mathcal{H}_A$ en A_1, A_2, A_3, A_4 est respectivement : A_1A_4, une parallèle à OA, A_3A_4 et une perpendiculaire à OA. Les droites A_1A_4 et A_3A_4 sont donc les tangentes primaires en deux points diamétralement opposés sur ε ; par suite, elles se coupent sur le cercle tritangent ω' à $\mathcal{H}_A$. On verrait de même que A_4 appartient au cercle tritangent ω'' à $\mathcal{H}'_A$.

Nous appellerons A_4 le *point principal* de ε par rapport aux hypocycloïdes $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}'_A$: *ce point est commun à l'ellipse* ε *et aux cercles tritangents* ω', ω''.

Lorsque la tangente MN' à $\mathcal{H}_A$ passe par O, M et N sont diamétralement opposés sur ε, et les tangentes primaires en ces points, dont l'une est MN, se coupent sur la circonférence ω' ; leur point d'intersection est donc le point N lui-même. D'après cela, *les points de rencontre, autres que* A_4, *de* ε *avec les circon-*

férences ω' *et* ω'' *sont les points secondaires des tangentes menées par* O *à* $\mathcal{C}_A$ *et* $\mathcal{C}'_A$.

Il est utile de remarquer que des deux tangentes rectangulaires menées par chacun de ces points d'intersection, l'une est primaire et l'autre secondaire en ce point, tandis que les deux tangentes rectangulaires menées par A_4 sont toutes deux secondaires en A_4.

19. Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les angles directeurs de trois tangentes à $\mathcal{C}_A$ (ou à $\mathcal{C}'_A$), et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les anomalies de leurs points primaires P_1, P_2, P_3 sur ε. D'après la formule (1), on a

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi - \alpha + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3).$$

Cela posé, si les trois tangentes considérées sont concourantes, on a

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = (2k + 1)\pi,$$

ce qui exige

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \alpha = (2k - 1)\pi, \quad \text{ou} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \pi - \alpha = 2k\pi. \quad (2)$$

D'autre part, pour que quatre points d'une ellipse soient concycliques, il faut et il suffit que la somme de leurs anomalies soit un multiple pair de π. L'anomalie de A_2 étant $\pi - \alpha$, on déduit de la relation (2) le théorème suivant :

La circonférence passant par les points primaires (sur ε*) des trois tangentes menées d'un même point à* $\mathcal{C}_A$ *(ou à* $\mathcal{C}'_A$*) passe par* A_2. Réciproquement, *toute circonférence passant par* A_2 *rencontre* ε *en trois autres points tels que les tangentes menées en ces points à* $\mathcal{C}_A$ *(ou à* $\mathcal{C}'_A$*) concourent en un même point.*

Si les tangentes en P_1, P_2, P_3 sont les côtés d'un triangle principal circonscrit à $\mathcal{C}_A$, on a

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2k\pi,$$

et par suite

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \alpha = (2k - 2)\pi, \quad \text{ou} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (2\pi - \alpha) = 2k\pi. \quad (3)$$

Il en résulte les propositions suivantes :

La circonférence qui passe par les points primaires (*sur* ε) *des trois côtés d'un triangle principal de* $\mathfrak{GC}_A$ (*ou de* $\mathfrak{GC}'_A$) *passe par* A_4. Réciproquement, *toute circonférence passant par* A_4 *rencontre* ε *aux points primaires des trois côtés d'un triangle principal.*

20. On sait que la somme des anomalies des pieds des normales issues d'un même point à une ellipse est un multiple impair de π. Mettons les relations (2) et (3) sous les formes

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+(2\pi-\alpha)=(2k+1)\pi, \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+(\pi-\alpha)=(2k-1)\pi;$$

elles admettent alors les interprétations suivantes :

Si d'un point de la normale en A_4 *on mène à* ε *les trois autres normales, les points d'incidence de ces normales sont les points primaires de trois tangentes concourantes à* $\mathfrak{GC}_A$ (*ou à* $\mathfrak{GC}'_A$).

Si d'un point de la normale en A_2 *on mène à* ε *les trois autres normales, les points d'incidence de ces normales sont les points primaires des trois côtés d'un triangle principal de* $\mathfrak{GC}_A$ (*ou de* $\mathfrak{GC}'_A$).

21. Portons vers l'extérieur et vers l'intérieur de ε (fig. 5) sur la normale en M deux longueurs $M\mu$ et $M\mu'$ égales au demi-diamètre conjugué à OM ; nous convenons d'appeler les points μ et μ' respectivement le *premier* et le *second point de Chasles* relatifs au point M. On sait que les droites $O\mu$ et $O\mu'$ passent respectivement par L et par L' et sont égales à $a+b$ et à $a-b$; les points μ et μ' décrivent donc, lorsque M se déplace sur ε, deux circonférences concentriques à ε, ayant pour rayons $a+b$ et $a-b$, et qui ont reçu les noms de *premier* et de *second cercle de Chasles* de l'ellipse.

Le rayon ω'D' du cercle ω' est parallèle à $O\mu$ et est égal à la moitié de cette droite ; donc $\mu D'$ coupe OA en un point fixe H, symétrique de O par rapport à ω' et appartenant au second cercle de Chasles, et D' est le milieu de $H\mu$. Donc la droite MD' qui joint les milieux de μH et $\mu\mu'$ est parallèle à $H\mu'$. Par conséquent, *si par un point* M *mobile sur une ellipse* ε *on mène*

une parallèle à la droite qui joint le second point de Chasles du point M *à un point fixe* H *du second cercle de Chasles, cette droite enveloppe une* $\mathfrak{I}\mathfrak{G}_3$.

La considération de $\mathfrak{I}\mathfrak{G}'_A$ conduit à un théorème analogue, relatif au premier cercle de Chasles.

22. Cherchons le point de contact T de MD′ avec son enveloppe $\mathfrak{I}\mathfrak{G}_A$ (fig. 5). Le cercle tritangent ω′ rencontre MD′ en D′ et en un second point S; on sait que D′T = D′S (**1**). Soit M′ le point de ε diamétralement opposé à M; les tangentes primaires menées en M et M′ étant rectangulaires (**17**), celle qui passe par M′ est M′S (**2**); il résulte de là que OS = OM = OM′. On a donc OS = OM, OH = Oμ′ et MS est parallèle à Hμ′ (**21**); par conséquent, la figure Hμ′SM est un trapèze isoscèle, et, par suite, les angles μ′MS, HSM sont égaux. Mais on a SD′ = D′T, HD′ = D′μ, donc Tμ est parallèle à HS; on en conclut que le triangle μMT est isoscèle. Ainsi, *le point de contact* T *et le point primaire* M (*sur* ε) *d'une tangente à* $\mathfrak{I}\mathfrak{G}_A$ *sont symétriques par rapport à la projection du premier point de Chasles, relatif à* M, *sur cette tangente.*

Un théorème analogue s'applique à H'_A.

23. Cherchons les tangentes communes à ε et à H_A.

Si une tangente MD′ à $\mathfrak{I}\mathfrak{G}_A$ touche ε, comme MD′ devient perpendiculaire à Mμ, T se confond avec M, et les deux courbes se touchent en M. Alors Mμ, étant perpendiculaire à la droite Hμ′ parallèle à MD′ (fig. 5), passe par le point H_1, diamétralement opposé à H sur le second cercle de Chasles. On en conclut que le point de contact M est le pied d'une normale menée de H_1 à ε. L'une de ces normales est H_1A_2, car les droites Oα, OH_1 étant symétriques par rapport à BC, H_1 est le second point de Chasles relatif à A_2. Appelons M_1, M_2, M_3 les pieds des trois autres normales, et désignons par $N_1N_2N_3$ le triangle formé par les tangentes communes menées en M_1, M_2, M_3 à ε et à $\mathfrak{I}\mathfrak{G}_A$; $N_1N_2N_3$ est un triangle principal de $\mathfrak{I}\mathfrak{G}_A$, puisque les normales de la courbe qui correspondent à ses côtés concourent en un même

point H_1. On sait (5) que ce point et l'orthocentre de $N_1N_2N_3$ sont symétriques par rapport au centre du cercle $N_1N_2N_3$; ω' étant le centre du cercle d'Euler, l'orthocentre de $N_1N_2N_3$ est en H et le centre du cercle circonscrit en O. De plus, le rayon du cercle circonscrit étant double de celui du cercle d'Euler, est égal à $a + b$; donc le cercle $N_1N_2N_3$ est le premier cercle de Chasles de ε. Un raisonnement analogue s'applique à $\mathcal{G}'_A$. D'après cela

Les hypocycloïdes $\mathcal{G}_A$ *et* $\mathcal{G}'_A$ *sont tritangentes à* ε. *Les points de contact de ces courbes avec* ε *sont respectivement les points d'incidence, autres que* A_2, *des normales menées à* ε *par le second et le premier point de Chasles de* A_2; *les tangentes communes forment deux triangles principaux inscrits respectivement dans le premier et le second cercle de Chasles de l'ellipse.*

24. Lorsque M se déplace sur l'ellipse, S décrit le cercle ω', et l'on a OS = OM. Donc

Le lieu géométrique du symétrique M *du point secondaire* S *(sur le cercle tritangent) d'une tangente variable à une* $\mathcal{G}_3$, *par rapport à la projection d'un point fixe* O *sur cette tangente, est une ellipse tritangente à l'hypocycloïde et ayant pour centre le point* O.

25. Puisque $N_1N_2N_3$ est un triangle principal de $\mathcal{G}_A$ et que μ est le symétrique de l'orthocentre H par rapport au point primaire D' (sur le cercle tritangent ω') de la tangente MD', cette tangente est la pédale de μ par rapport au triangle $N_1N_2N_3$; μ est donc le foyer et MD' la tangente au sommet d'une parabole p inscrite à $N_1N_2N_3$; la tangente en M à ε étant perpendiculaire à μM est tangente à p. On a donc le théorème suivant :

Soient μ *le foyer, s le sommet d'une parabole variable p inscrite au triangle fixe* $N_1N_2N_3$ *et* T *le point de contact de la tangente au sommet de p avec l'hypocycloïde de Steiner de* $N_1N_2N_3$. *Le symétrique* M *de* T *par rapport à s décrit l'ellipse* ε *qui touche l'hypocycloïde aux points de contact de cette courbe avec les côtés de* $N_1N_2N_3$; *ce point appartient au cercle de Chasles de* ε *et la droite* Mμ *est normale à* ε; *la quatrième tangente commune aux courbes* ε *et p touche* ε *en* M.

26. Si le point A se déplace sur la circonférence ABC, les hypocycloïdes $\mathfrak{H}_A$ et $\mathfrak{H}'_A$ se déplacent sans changer de grandeur, en restant tritangentes à ε. Donc

A une ellipse donnée ε on peut circonscrire deux $\mathfrak{H}_3$ tritangentes à cette ellipse. Ces courbes sont de grandeur déterminée et elles peuvent se déplacer sans changer de grandeur, en restant tritangentes à l'ellipse; leurs cercles tritangents ont pour rayons $\frac{1}{2}(a-b)$ et $\frac{1}{2}(a+b)$. Les normales à ε aux points où cette courbe touche l'une ou l'autre des deux $\mathfrak{H}_3$ sont concourantes et leurs points de concours décrivent, lorsque les hypocycloïdes se déplacent, les cercles de Chasles de ε. Les triangles formés par les tangentes communes à ε et à chacune des $\mathfrak{H}_3$ sont des triangles principaux de ces hypocycloïdes; ils sont inscrits dans les cercles de Chasles de ε.

27. Identifions chacune des hypocycloïdes $\mathfrak{H}_A$ et $\mathfrak{H}'_A$ avec une hypocycloïde fixe $\mathfrak{H}$. Suivant que ce sera $\mathfrak{H}_A$ ou $\mathfrak{H}'_A$ qui aura été identifiée avec $\mathfrak{H}$, le centre O de ε sera intérieur ou extérieur au cercle tritangent ω de H, la distance ωO sera égale à $\frac{1}{2}(a-b)$ ou à $\frac{1}{2}(a+b)$ et le diamètre du cercle ω sera égal à $a+b$ ou à $a-b$. Les résultats trouvés précédemment peuvent se traduire par l'énoncé suivant :

Si la somme ou la différence des demi-axes a et b d'une ellipse ε est égale au diamètre du cercle tritangent à une $\mathfrak{H}_3$ fixe $\mathfrak{H}$, cette ellipse peut se déplacer sans changer de grandeur en restant tritangente à $\mathfrak{H}$. Les normales menées à ces deux courbes par leurs points de contact concourent en un même point; ce point et le centre de ε décrivent des circonférences concentriques au cercle tritangent et dont les rayons sont respectivement égaux à $\frac{3}{2}(a \mp b)$ et à $\frac{1}{2}(a \mp b)$. Le cercle principal et le cercle secondaire de ε sont tangents au cercle tritangent à $\mathfrak{H}$. Le triangle formé par les tangentes communes aux deux courbes est un triangle principal de $\mathfrak{H}$ et est inscrit à l'un des cercles de Chasles de ε.

Cette proposition peut encore s'énoncer comme suit :

Si d'un point H_1 on mène à une $\mathfrak{H}_3$ fixe $\mathfrak{H}$ trois normales H_1M_1,

H_1M_2, H_1M_3, *les points* M_1, M_2, M_3 *sont les points de contact de* $\mathfrak{G}$ *avec une ellipse tritangente* ε. *Soient* a *et* b *les demi-axes de cette ellipse,* O *son centre et* ω *le centre du cercle tritangent à* $\mathfrak{G}$; *le diamètre* 2 *du cercle* ω *est égal à* $a + b$ *ou à* $a - b$, *et la distance* $O\omega$ *est égale à* $\frac{1}{2}(a - b)$ *ou à* $\frac{1}{2}(a + b)$, *suivant que* H_1 *est intérieur ou extérieur au cercle* ω; *lorsque* H_1 *se déplace sur une circonférence de centre* ω, ε *reste de grandeur constante, etc.*

Il résulte du § 15 qu'il n'y a pas d'autre conique tritangente à $\mathfrak{G}$ que les ellipses fournies par le procédé que nous venons d'indiquer.

28. Le mouvement d'une ellipse de grandeur invariable qui se déplace comme il vient d'être dit, c'est-à-dire en restant tritangente à une $\mathfrak{G}_3$ fixe, peut se ramener à un mouvement hypocycloïdal; en d'autres termes, il existe un cercle, invariablement lié à ε, qui, étant entraîné dans le mouvement de cette ellipse, roule à l'intérieur d'un cercle fixe.

Soit σ' le sommet de $\mathfrak{G}_A$ qui correspond au sommet σ de K_A (fig. 5); l'angle $O\omega'\sigma' = O\omega\sigma = \frac{1}{3}(\pi - 2\alpha)$ (**17**); le grand axe de ε fait donc avec $\omega'\sigma'$ un angle égal à $\frac{1}{3}(\pi + \alpha)$. Par conséquent, lorsque ε se déplace en restant tritangente à $\mathfrak{G}_A$ supposée fixe, la vitesse de rotation de BC autour de O est égale et de sens contraire à la moitié de celle de $\omega'O$ autour de ω'; il résulte de là que BC enveloppe une $\mathfrak{G}_3$, et l'on démontrerait de même que le petit axe de ε enveloppe une autre $\mathfrak{G}_3$. Inversement, si l'on suppose que ε soit fixe et que $\mathfrak{G}_A$ se déplace en lui restant tritangente, les tangentes de rebroussement de $\mathfrak{G}_A$ enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements; c'est ce qu'il est aisé de voir en calculant les vitesses de rotation de ces droites.

Si l'on suppose le second cercle de Chasles invariablement lié à BC, la vitesse de rotation de ce cercle autour de O, étant égale à celle de BC, sera égale et de sens contraire à la moitié de celle de $\omega'O$. On conclut de là que, lorsque ε se déplace en restant tritangente à $\mathfrak{G}_A$, ce cercle roule sans glissement à l'intérieur du cercle c décrit par ω' comme centre avec un rayon égal à $\frac{3}{2}(a - b)$. Évidemment, si l'on suppose, au contraire, que

ε reste fixe et que $\mathfrak{GC}_A$ se déplace en lui restant tritangente, le mouvement du cercle c se réduira à un roulement sur le second cercle de Chasles de ε. On a donc les théorèmes suivants :

Lorsqu'une ellipse de grandeur invariable se déplace en restant tritangente à une $\mathfrak{GC}_3$ fixe, ses axes enveloppent deux $\mathfrak{GC}_3$.

Lorsqu'une $\mathfrak{GC}_3$ de grandeur variable se déplace en restant tritangente à une ellipse fixe, ses tangentes de rebroussement enveloppent une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Si l'un des cercles de Chasles d'une ellipse roule, en entraînant cette ellipse, à l'intérieur d'un autre cercle dont le rayon est à celui de ce cercle de Chasles dans le rapport 3 : 2, cette ellipse reste constamment tritangente à une $\mathfrak{GC}_3$ fixe.

Si un cercle c, concentrique au cercle tritangent à une $\mathfrak{GC}_3$, roule en entraînant cette courbe sur un cercle fixe (le contact des deux cercles étant intérieur), dont le rayon est les $\frac{2}{3}$ de celui du cercle c, cette $\mathfrak{GC}_3$ reste tritangente à une ellipse dont l'un des cercles de Chasles coïncide avec le cercle fixe.

29. Une ellipse mobile touche en général son enveloppe en quatre points ; lorsque ε se déplace en restant tritangente à $\mathfrak{GC}_A$, elle enveloppe donc une courbe complémentaire que nous allons déterminer. L'ellipse ε étant une figure invariable, les normales aux points où elle touche son enveloppe sont concourantes et, par conséquent, le quatrième point de contact de ε avec son enveloppe est (fig. 5) le point A_2. Cherchons le lieu de ce point lorsque $\mathfrak{GC}_A$ reste fixe et que ε se déplace.

Soit I le milieu de OH_1 et soit ν le premier point de Chasles de A_2. La droite IA_2 joint les milieux de deux côtés du triangle $H_1O\nu$; elle est donc parallèle à $O\nu$ et est égale à la moitié de cette droite, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(a+b)$; OB étant la bissectrice de l'angle νOH_1, IA_2 rencontre BC en un point I' tel que le triangle IOI' est isoscèle et l'on a $II' = IH_1 = IO = \frac{1}{2}(a-b)$. Décrivons de ω' et de I comme centres des circonférences c et c' ayant respectivement pour rayons $\frac{3}{2}(a-b)$ et $\frac{1}{2}(a-b)$; la circonférence c reste fixe lorsque l'ellipse se déplace. L'angle OII' est

égal à $\pi - 2\alpha$ et l'angle $O\omega'\sigma'$ est égal (**17**) à $\frac{1}{3}(\pi - 2\alpha)$, donc $OII' = 3O\omega'\sigma'$. Si l'on fait l'angle $\sigma'\omega'\tau = \frac{\pi}{3}$, l'arc $I'H_1$ du cercle c' est donc égal à l'arc τH_1 du cercle c et, par conséquent, le mouvement du cercle c' se réduit à un roulement à l'intérieur du cercle fixe et de rayon triple c. Le point A_2, invariablement lié à c', décrit donc une hypotrochoïde k, de module $-\frac{1}{3}$; cette hypotrochoïde est d'ailleurs tangente à ε, car H_1A_2 est une normale commune à ces deux courbes.

On serait arrivé à un résultat analogue en considérant l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_A$.

30. Le mouvement de ε par rapport à l'hypotrochoïde k peut se définir d'une façon très simple. Nous rappelons d'abord un théorème connu (*).

Considérons l'épitrochoïde décrite par un point M entraîné dans le roulement d'un cercle O′ sur un autre cercle O (**). Soient A le point de contact des deux cercles et B le point diamétralement opposé à A sur le cercle O′; portons sur le diamètre AB des longueurs $O'C = O'D = O'M$ et sur MB une longueur MM_1 égale à $\frac{2O'C \cdot MB}{OA}$. Si l'on fait glisser les extrémités de la droite CD sur les côtés de l'angle droit CMD, le point B décrit une ellipse e et le point M_1 une autre ellipse e', homothétique de e par rapport à M; soit e'' l'ellipse symétrique de e' par rapport au milieu de MM_1. Nous avons démontré dans la note précitée que quand le cercle O′ roule sur le cercle O, le mouvement de e'' se réduit à un simple roulement sur l'épitrochoïde engendrée par M.

Appliquons ce théorème à notre hypotrochoïde. Les points C et D deviennent alors les points C_1 et D_1 situés sur les parallèles menées par A_2 aux axes de ε (fig. 5), et le point M_1, considéré dans l'énoncé précédent, devient le point U défini par l'égalité

$$A_2U : A_2O = 2\omega'I : \omega'H_1 = 2(a - b) : \frac{3}{2}(a - b) = 4 : 3.$$

(*) Voir notre note : *Sur la rectification des épitrochoïdes.* (Société royale des Sciences de Liége, Mémoires, 3e série, t. IV, 1902.)

(**) Le lecteur est prié de tracer la figure.

On conclut de là que e'' est, dans le cas actuel, la courbe homothétique de ε par rapport à A_2, le rapport d'homothétie étant 4 : 3. Donc

Lorsqu'une ellipse de grandeur invariable ε *se déplace en restant tritangente à une* $\mathcal{C}_3$ *fixe, elle enveloppe une hypotrochoïde* k *de module* $-\frac{1}{3}$, *et le rapport des arcs correspondants des courbes* ε *et* k *est constant et égal à* 3 : 4.

31. Les pieds des normales menées d'un point H_1 à une $\mathcal{C}_3$ étant les points de contact de cette courbe avec une ellipse ε, si l'on suppose que deux de ces points coïncident, ε aura avec l'hypocycloïde un contact quartiponctuel, et le point H_1 appartiendra à la développée de cette courbe. Les propriétés connues de $\mathcal{C}_3$ conduisent sans difficulté aux résultats suivants, que nous nous bornons à énoncer :

Si une ellipse ε *a avec une* $\mathcal{C}_3$ *un contact quartiponctuel en un point* A *et touche cette courbe en un second point* B : 1° *son centre* C *est le symétrique, par rapport au centre du cercle tritangent, du point de contact de l'hypocycloïde avec la tangente perpendiculaire à la tangente en* A, *et, par conséquent, le lieu de* C *est une* $\mathcal{C}_3$ *égale à la première*; 2° *la tangente en* B *est perpendiculaire à la tangente menée par* A *et dont le point de contact n'est pas* A; 3° *la normale à l'ellipse au point* B *coupe l'ellipse au point diamétralement opposé à* A; 4° *le rayon* CA *de l'ellipse est égal au diamètre du cercle tritangent*; 5° *le point d'intersection des tangentes en* A *et* B *et la projection de* C *sur la tangente en* A *se trouvent sur le cercle tritangent.*

32. Supposons que l'ellipse ε se déforme, tout en restant tritangente à $\mathcal{C}_A$, de façon que son centre O (fig. 5) décrive une droite $\omega' O$ passant par le centre du cercle tritangent à $\mathcal{C}_A$. L'angle $O\omega'\sigma'$, qui est égal à $\frac{1}{3}(\pi - 2\alpha)$, étant alors constant, α est aussi constant, et, par suite, les axes ε ont des directions fixes; de plus, le point A_4 est fixe, car la droite $\omega' A_4$ fait un angle constant avec $\omega'\sigma'$ et a une longueur constante égale au rayon du cercle tritangent. D'ailleurs, les demi-axes de ε sont égaux

aux segments déterminés par O sur le diamètre Oω′ du cercle ω′. Donc *si un angle droit se déplace parallèlement à lui-même de façon que son sommet* O *décrive une droite sur laquelle sont marqués deux points fixes* A *et* B (fig. 6), *et que l'on porte sur les côtés de cet angle deux longueurs* OM *et* ON *respectivement égales à* OA *et à* OB, *l'ellipse qui a pour demi-axes* OM *et* ON *passe par un point fixe et reste tritangente à une* $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_3$.

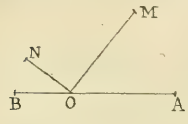


Fig. 6.

33. La droite OL (fig. 5) est parallèle à ω′D′. Par conséquent, si ε varie en restant tritangente à $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_A$, et si l'on suppose que la tangente MD′ à $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_A$ soit fixe, OL aura une direction constante. Donc *les points primaires d'une même tangente à une* $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_3$ *par rapport aux différentes ellipses tritangentes à cette courbe correspondent à des points des cercles principaux se trouvant aux extrémités de rayons parallèles et de même sens de ces cercles.*

34. Lorsque le centre O de l'ellipse ε se trouve sur le cercle tritangent, *b* devient nul et ε se réduit, au point de vue ponctuel, à une tangente δ à $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_A$; au point de vue tangentiel, cette ellipse doit être alors considérée comme constituée par les deux points où la tangente δ rencontre de nouveau $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_A$. Si dans le théorème précédent on suppose que les ellipses ε se réduisent ainsi à des droites, on obtient le théorème suivant :

Sur différentes droites AB, A′B′, ... *tangentes à une* $\mathfrak{D}\mathfrak{C}_3$ *et limitées de part et d'autre à cette courbe, on décrit des circonférences ayant ces droites comme diamètres. Les projections sur les droites* AB, A′B′, ... *des points de ces circonférences qui se trouvent aux extrémités de rayons parallèles et de même sens sont situées sur une même tangente à l'hypocycloïde.*

35. La droite MD′ (fig. 5) est parallèle à L′A; elle fait donc avec BC un angle égal à $\frac{1}{2}(\pi - \lambda - \alpha)$. Par conséquent, si l'on remplace la droite MD′ par une droite *d* passant par M et faisant

avec MD′ un angle constant φ, cela revient à augmenter α de l'angle 2φ, et par suite d enveloppe une hypocycloïde égale à $\mathfrak{H}_A$. Donc *si par un point variable* M *d'une ellipse* ε *tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$ *on mène une droite faisant un angle constant avec la tangente primaire menée par ce point à l'hypocycloïde, cette droite enveloppe une hypocycloïde égale à la première et également tritangente à* ε.

Lorsque ε se réduit à une droite δ, on retrouve un théorème dû à Laguerre (*).

Si par un point variable M *pris sur une tangente fixe* δ *à une* $\mathfrak{H}_3$ *on mène une droite faisant un angle constant avec la tangente menée par* M *et distincte de* δ, *cette droite enveloppe une* $\mathfrak{H}_3$ *égale à la première, tangente à* δ *et passant par les points où* δ *rencontre la première hypocycloïde.*

Remarquons qu'on arriverait à des théorèmes analogues si, au lieu de supposer que l'angle des droites MD′ et d soit constant, on supposait que la bissectrice de cet angle ait une direction fixe.

36. Soit α le symétrique de A par rapport au petit axe de ε (fig. 5); les droites $L\alpha$ et MA_2 concourent en un point G de BC. Par M menons une perpendiculaire à MA_2 et soient β le point où cette droite rencontre LA′ et γ la projection de β sur LM; la droite $L\alpha$ est perpendiculaire à LA′, donc le quadrilatère $GML\beta$ est inscriptible et, par suite, la projection sur LM du milieu de $G\beta$ est à la fois le milieu de ML et celui de $E\gamma$; donc $L\gamma = ME$. Soit δ le point de rencontre commun des droites LA′ et MA_4 avec BC, les triangles semblables $LE\delta$, $L\beta\gamma$ donnent

$$L\beta : L\delta = L\gamma : LE = ME : LE = b : a.$$

La droite MD″ étant parallèle à LA′, on conclut de l'égalité précédente que le faisceau $(M, E\beta D''A_4)$ a un rapport anharmonique constant. Coupons ce faisceau par la droite A_1A_4, et désignons par ε et ε' les points de rencontre de cette droite avec les

(*) Laguerre, *Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1879, p. 108.)

rayons MD'' et Mβ, le rapport $A_4\varepsilon : A_4\varepsilon'$ sera constant. Donc la droite Δ, menée par ε' parallèlement à MD'', enveloppe, lorsque M se déplace sur l'ellipse, une $\mathfrak{G}_3$ homothétique de $\mathfrak{G}'_A$ par rapport à A_4. Prolongeons A_2M d'une longueur MQ égale à A_2M; le point Q décrit, lorsque M parcourt ε, une ellipse ε', d'axes $2a$, $2b$, ayant pour centre A_4 et dont le petit axe est dirigé suivant A_4A_1. Faisons tourner cette ellipse autour de A_4A_1 jusqu'à ce qu'elle se projette suivant son cercle secondaire; la droite Δ, étant parallèle à LA', est perpendiculaire à Lα et aussi à la droite qui joint les points correspondant à M et à A_2 sur le cercle secondaire de ε'; elle est donc la trace, sur le plan de projection, du plan mené par M perpendiculairement à A_2M. On a donc le théorème suivant, dû à Laguerre (*).

Soient A_2 *un point fixe et* Q *un point variable d'une ellipse* ε'. *Si par le milieu* M *de* A_2Q *on mène un plan perpendiculaire à cette droite, la trace de ce plan sur le plan sur lequel* ε' *se projette suivant un cercle enveloppe une* $\mathfrak{G}_3$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème analogue que l'on obtiendrait en remplaçant $\mathfrak{G}'_A$ par $\mathfrak{G}_A$.

37. Soient a_1, a_2, a_3 les points secondaires (sur ε) des tangentes menées de O à $\mathfrak{G}_A$ (fig. 5) (**); les points de rencontre de ε avec le cercle tritangent ω' sont a_1, a_2, a_3 et le point principal A_4 de ε (**18**). Lorsque deux de ces points coïncident, ε est tangente au cercle ω'. Supposons d'abord que A_4 coïncide avec l'un des points a_1, a_2, a_3; alors OA_4 est tangente à ε et son point primaire est A_2; or la tangente primaire menée par A_2 à $\mathfrak{G}_A$ est parallèle à OA; on conclut de là que A_4 doit coïncider avec l'un des sommets de ε, par exemple avec C. Dans ce cas, α est nul et l'anomalie de A_2 est égale à π; si dans la relation (1) du § 17 on fait $\alpha = 0$, $\lambda = \pi$, il vient $O = \frac{5\pi}{3}$, ce qui montre que A_4 est également un sommet de $\mathfrak{G}_A$.

Supposons maintenant que deux des points a_1, a_2, a_3 coïnci-

(*) Laguerre, *loc. cit.*

(**) Les points a_1, a_2, a_3 ne sont pas indiqués sur la figure.

dent. Le point O, étant le point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines, appartient à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_A$. Par conséquent :

Le lieu du centre O *d'une ellipse tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$, *et tangente au cercle tritangent en un point* a_1 *autre que l'un des sommets de cette courbe, est l'hypocycloïde elle-même. La droite* Oa_1 *touche l'hypocycloïde au point* O.

38. Par un point donné M, il passe une infinité d'ellipses tritangentes à une $\mathfrak{H}_3$. Si nous supposons (fig. 5) que l'ellipse ε varie en restant tritangente à $\mathfrak{H}_A$, le point M restant fixe, la tangente primaire MD′ sera également fixe, et il en sera de même de la tangente perpendiculaire M′S. On conclut de là que *le lieu du point diamétralement opposé* M′ *à un point fixe* M *sur une ellipse variable* ε *passant par* M *et tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$ *fixe* $\mathfrak{H}_A$ *se compose des trois tangentes perpendiculaires aux tangentes menées par* M *à l'hypocycloïde.*

Soit ABC (fig. 7) le triangle principal formé par ces trois tangentes; le point M′ se trouvant sur l'un des côtés de ABC, le centre O de ε sera situé sur l'un des côtés du triangle A′B′C′ dont les sommets sont les milieux de MA, MB, MC; or M est l'orthocentre de ABC, donc A′, B′, C′ sont les points primaires (sur le cercle tritangent) des tangentes MA, MB, MC. Par conséquent, *le lieu du centre d'une ellipse passant par un point fixe* M *et tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$ *fixe se compose des trois côtés du triangle dont les sommets sont les points primaires (sur le cercle tritangent) des tangentes menées par* M *à l'hypocycloïde.*

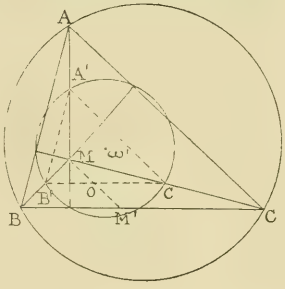


Fig. 7.

Réciproquement, *lorsque le centre* O *d'une ellipse tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$ *décrit une droite* B′C′, *cette ellipse passe par un point fixe* M *situé à l'intersection des tangentes primaires menées à l'hypocycloïde par les points* B′, C′, *où cette droite rencontre le cercle tritangent.*

39. Supposons que ε soit fixe et que B′C′ tourne autour du centre O de ε; le point M se déplacera sur l'ellipse ε. Par conséquent :

Si par un point fixe O *on mène dans le cercle tritangent à une* $_3\mathcal{G}$ *une corde variable* B′C′, *le lieu du point d'intersection des tangentes primaires menées à cette courbe par les points* B′ *et* C′ *est une ellipse tritangente à l'hypocycloïde et ayant pour centre le point* O.

Si l'on suppose que les points B′ et C′ coïncident, la droite B′C′ devient tangente au cercle tritangent et le point M, étant l'intersection de deux tangentes infiniment rapprochées, se trouve sur l'hypocycloïde. Donc :

Toute ellipse ε *tritangente à une* $\mathcal{G}_3$ *coupe cette courbe en deux points qui sont réels ou imaginaires suivant que le centre* O *de cette ellipse est extérieur ou intérieur au cercle tritangent à l'hypocycloïde. La tangente menée en chacun de ces points à l'hypocycloïde a pour point primaire sur le cercle tritangent le point de contact d'une des tangentes menées de* O *à ce cercle.*

40. ABC étant un triangle principal de l'hypocycloïde $\mathcal{G}_A$, soient D son orthocentre et O un point quelconque de son plan (fig. 8); les points primaires M et M′ des tangentes rectangulaires BC et DA à l'hypocycloïde par rapport à une ellipse ε tritangente à $\mathcal{G}_A$ et ayant son centre en O sont symétriques par rapport à O. Donc :

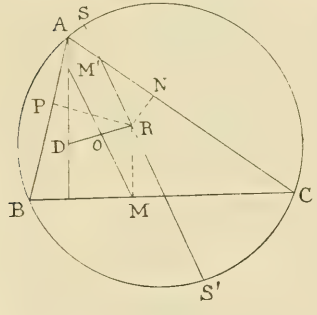


Fig. 8.

Si par un point O *on mène dans chacun des angles droits formés par les côtés et les hauteurs correspondantes d'un triangle* ABC *trois droites* MM′, NN′, PP′ *ayant leur milieu commun en* O, *les points* M, M′, N, N′, P, P′ *appartiennent à une même ellipse tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle* ABC.

41. Soit R (fig. 8) le symétrique de D par rapport à O; le point M sera la projection de R sur BC. Le théorème précédent peut donc prendre la forme suivante, qui constitue une généralisation curieuse du théorème de Steiner concernant l'enveloppe des droites de Simson d'un triangle :

L'ellipse ε *qui passe par les projections d'un point quelconque* R *sur les côtés d'un triangle* ABC *et dont le centre est au milieu de la droite qui joint ce point à l'orthocentre du triangle est tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle* ABC. *Les axes de cette ellipse sont égaux aux segments déterminés par* R *sur le diamètre du cercle* ABC *qui passe par* R *et sont parallèles aux droites de Simson des extrémités de ce diamètre.*

Nous n'avons pas donné de démonstration explicite de la dernière partie de ce théorème. Nous laissons au lecteur le soin de développer cette démonstration, qui résulte de ce qui a été dit aux paragraphes 26 et 32.

42. Supposons que le point R décrive une droite Δ (fig. 8); le point O décrit alors aussi une droite et, par conséquent (**38**), l'ellipse ε passe par un point fixe. Lorsque le point R coïncide avec l'un des points où la droite Δ rencontre le cercle ABC, ε se réduit à la droite de Simson de ce point. Par conséquent, *lorsque le point* R *décrit une droite* Δ, *l'ellipse* ε, *définie au paragraphe précédent, passe par un point fixe situé à l'intersection des pédales des points où* Δ *rencontre le cercle* ABC.

Réciproquement, *si une corde* SS′ *du cercle* ABC *tourne autour du point fixe* R, *le lieu géométrique du point d'intersection des pédales des points* S et S′ *par rapport au triangle* ABC *est une ellipse* ε *tritangente à l'hypocycloïde de Steiner du triangle* ABC.

43. On peut étendre les théorèmes précédents aux droites de Simson d'angle α. Supposons encore que la corde SS′ tourne autour du point R et soient $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ (*) les pédales d_α des points S et S′. Sur DS, DS′, DR, construisons des triangles

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

isoscèles S_1DS, $S_1'DS'$, R_1DR dont l'angle à la base soit α; les points S_1 et S_1' sont les points primaires (sur le cercle tritangent) des tangentes $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma$ à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}'$ enveloppe des pédales d_α du triangle ABC. La droite S_1S_1' passe par le point fixe R_1, donc (**39**) le point d'intersection des droites $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ décrit une ellipse ε' tritangente à $\mathfrak{H}'$ Soient M_1, N_1, P_1 les projections obliques du point R sur les côtés de ABC; lorsque la droite SS' coïncide avec RM_1, les droites $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ se coupent en M_1; donc l'ellipse ε' passe par M_1, N_1, P_1. Par conséquent :

L'ellipse ε', *qui passe par les projections d'angle* $90° + \alpha$ *d'un point* R *sur les côtés du triangle* ABC *et dont le centre est le sommet* R_1 *du triangle isoscèle* R_1DR *dont l'angle à la base est* α, *est tritangente à l'hypocycloïde* $\mathfrak{H}'$, *enveloppe des pédales* d_α *du triangle* ABC. *Cette ellipse est le lieu du point d'intersection des pédales* d_α *des points où une corde variable menée par* R *rencontre le cercle* ABC.

44. Soient A', B', C' (fig. 9) les points primaires de trois tangentes BC, CA, AB à une hypocycloïde $\mathfrak{H}$ par rapport à une ellipse ε tritangente à cette courbe. Supposons que les anomalies de ces tangentes soient λ, $\lambda + 120°$, $\lambda + 240°$; l'ellipse ε sera l'ellipse de Steiner circonscrite au triangle A'B'C'. De la relation $\theta = 120° - \frac{\alpha}{3} + \lambda$ (**17**), on déduit que les angles directeurs des tangentes BC, CA, AB sont respectivement θ, $\theta + 120°$, $\theta + 240°$, et, par conséquent, le triangle ABC formé par ces tangentes est équilatéral; le centre ω du cercle tritangent à $\mathfrak{H}$ coïncide donc avec le centre de gravité de ce triangle. Soient A_1, B_1, C_1 les points secondaires (sur le cercle ω) des tangentes BC, CA, AB, O le centre de ε et D, E, F les milieux des côtés de ABC; les points A_1, B_1, C_1 sont situés sur le cercle ω et

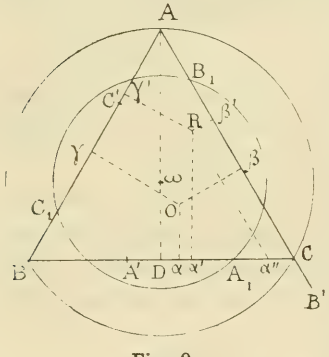


Fig. 9.

forment un triangle équilatéral; les distances DA_1, EB_1, FC_1 sont donc égales; représentons-les par k. Les tangentes menées à $\mathfrak{H}$ perpendiculairement à BC, CA, AB coupent ces côtés aux points A_1, B_1, C_1 et passent par les points diamétralement opposés à A', B', C' sur l'ellipse ε; par conséquent, les projections α, β, γ du point O sur BC, CA, AB sont les milieux des segments A_1A', B_1B', C_1C', et l'on a

$$DA' = 2D\alpha - DA_1, \quad EB' = 2E\beta - EB_1, \quad FC' = 2F\gamma - FC_1,$$

d'où

$$\Sigma DA' = 2\Sigma D\alpha - \Sigma DA_1 = -3k.$$

La somme des segments DA', EB', FC' reste donc constante lorsque l'on suppose que le triangle ABC et l'hypocycloïde $\mathfrak{H}$ restent fixes, et que l'ellipse ε' varie. Par conséquent :

Si sur les côtés BC, CA, AB *d'un triangle équilatéral* ABC *on porte, à partir des milieux* D, E, F *de ces côtés, trois segments variables* DA', EB', FC' *dont la somme soit constante, l'ellipse de Steiner circonscrite au triangle* A'B'C' *reste constamment tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$ *fixe inscrite au triangle* ABC.

45. Soient α', β', γ' et α'', β'', γ'' les projections orthogonales et les projections d'angle α d'un même point R (fig. 9) sur les côtés du triangle ABC. Le segment $D\alpha''$ est égal à $D\alpha' + R\alpha' \operatorname{cotg}\alpha$. Donc

$$\Sigma D\alpha'' = \Sigma D\alpha' + \operatorname{cotg}\alpha \Sigma R\alpha' = AD \operatorname{cotg}\alpha.$$

La somme des segments $D\alpha''$, $E\beta''$, $F\gamma''$ est donc constante et, par conséquent, les points α'', β'', γ'' peuvent, dans le théorème précédent, être substitués aux points A', B', C'. Donc :

L'ellipse de Steiner circonscrite au triangle podaire d'angle α *d'un point* R *par rapport à un triangle équilatéral* ABC *reste, lorsque le point* R *se déplace d'une manière quelconque, tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$ *fixe inscrite au triangle* ABC.

46. Les résultats précédents peuvent être généralisés; nous allons voir, en effet, que l'on obtient des théorèmes analogues à

ceux que nous avons déjà rencontrés, si l'on y remplace le cercle tritangent par une ellipse tritangente quelconque. Revenons aux notations de la figure 5 et soient (fig. 10) M et m les points primaires (sur ε) de deux tangentes MK et mK à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_A$; soient L et l les points qui correspondent à M et à m sur le cercle principal. Les points primaires (sur le cercle ω') des tangentes MK et mK sont (**16**) les points D′ et d' qui divisent AL et Al dans le rapport $(a + b) : (a - b)$. Supposons que Mm pivote autour d'un point fixe P, Ll passera par un autre point fixe P′ et la corde D′d' du cercle ω' passera par le point fixe O′ qui divise AP′ dans le rapport $(a + b) : (a - b)$.

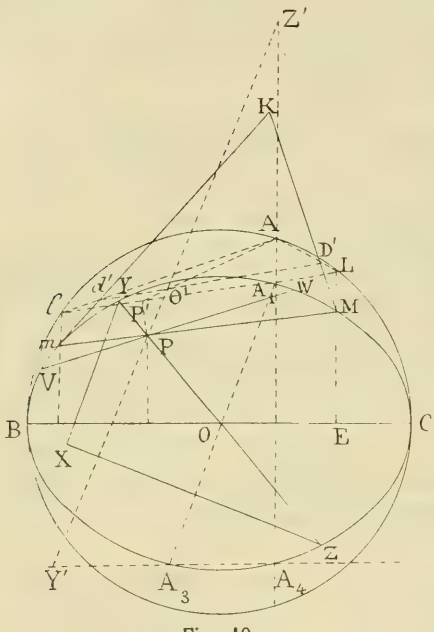


Fig. 10.

Par conséquent (**39**), le point K décrit alors une ellipse ε' tritangente à $\mathfrak{H}_A$ et ayant O′ pour centre. Donc :

Si une corde variable Mm *d'une ellipse* ε, *tritangente à une* $\mathfrak{H}_3$, *pivote autour d'un point fixe, le point d'intersection* K *des tangentes primaires menées à l'hypocycloïde par les extrémités de cette corde décrit une ellipse* ε' *tritangente à l'hypocycloïde.*

47. Soient Y et Z (fig. 10) les extrémités du diamètre OP de l'ellipse ε; faisons coïncider Mm avec YZ. Les tangentes primaires menées à $\mathfrak{H}_A$ par Y et Z sont rectangulaires et se coupent en un point X qui appartient à la fois à ε' et au cercle ω'; d'ailleurs, ces tangentes sont secondaires en X par rapport à ε', donc (**18**) le point X est le point principal de ε' et les axes de ε' sont parallèles aux droites XY et XZ.

Prenons pour axes coordonnés les axes de symétrie de ε, et soient x_1, y_1 les coordonnées du centre O′ de ε′, x', y' celles de P. Les coordonnées de P′ sont x' et $\frac{ay'}{b}$, celles de A sont $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$, et comme O′ divise AP′ dans le rapport $(a+b):(a-b)$, on a

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2a}[(a+b)x' + a(a-b)\cos\alpha], \\ y' &= \frac{1}{2b}[(a+b)y' + b(a-b)\sin\alpha]. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Transportons l'origine au point A_4 et soient X_1, Y_1 et X', Y' les nouvelles coordonnées des points O′ et P, il vient :

$$X_1 = \frac{a+b}{2a}X', \qquad Y_1 = \frac{a+b}{2b}Y', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

d'où

$$\frac{X'}{X_1} + \frac{Y'}{Y_1} = 2.$$

On déduit de là que O′ est le milieu du segment Y′Z′ déterminé sur la droite O′P par les côtés de l'angle droit $A_1A_2A_3$. Les points Y′ et Z′ se trouvent donc sur deux droites A_1A_4 et A_3A_4 rectangulaires et tangentes à $\mathfrak{H}_A$ et sont symétriques par rapport au centre O′ de l'ellipse ε′; par conséquent (**17**), ils sont situés sur cette ellipse; donc *le point* P *se trouve à l'intersection des diamètres des ellipses* ε *et* ε′ *qui joignent les points primaires, relativement à chacune de ces ellipses, des tangentes rectangulaires menées à* $\mathfrak{H}_A$ *par le point principal de l'autre.*

De la symétrie de cette détermination du point P, nous concluons que ce point joue le même rôle par rapport aux ellipses ε et ε′, c'est-à-dire que *si une corde de* ε′ *pivote autour de* P, *le point d'intersection des tangentes primaires, menées à* $\mathfrak{H}_A$ *par les extrémités de cette corde, décrit l'ellipse* ε.

Nous convenons de dire que P est le point *bigénérateur* des ellipses ε, ε′.

48. Les formules (5) montrent que P divise Y′Z′ dans le rapport $a:b$; par analogie, ce point divise YZ dans le rapport

$a' : b'$, a' et b' désignant des demi-axes de ε'. Donc le *point bigénérateur de deux ellipses* ε *et* ε' *tritangentes à* $\mathfrak{G}_A$, *dont la première est fixe, tandis que la seconde se déplace en restant de grandeur constante, décrit une ellipse homothétique à* ε.

49. Lorsque O′ coïncide avec O, l'ellipse ε' se confond avec ε. Dans ce cas, on a $x_1 = o$, $y_1 = o$, et, par suite, les coordonnées de P deviennent

$$x' = -a\frac{a-b}{a+b}\cos\alpha, \quad y' = -b\frac{a-b}{a+b}\sin\alpha. \quad . \quad . \quad (6)$$

Ces coordonnées définissent un point O_1 qui divise A_1A_3 dans le rapport $a : b$ et que nous appellerons le *centroïde* de ε par rapport à $\mathfrak{G}_A$. Donc :

La droite qui joint les points primaires des deux tangentes secondaires menées par un point variable d'une ellipse tritangente à $\mathfrak{G}_A$ *passe par un point fixe qui est le centroïde de cette ellipse.*

50. Si, dans les considérations qui précèdent, on avait remplacé l'hypocycloïde $\mathfrak{G}_A$ par $\mathfrak{G}'_A$, il aurait fallu remplacer b par $-b$; les formules montrent alors que O_1 divise extérieurement A_1A_3 dans le rapport $a : b$. Le centroïde O_1 est donc intérieur ou extérieur à ε, selon que l'on considère ε par rapport à $\mathfrak{G}_A$ ou à $\mathfrak{G}'_A$, c'est-à-dire selon que le centre O sera intérieur ou extérieur au cercle tritangent. Dans le premier cas, les deux points d'intersection de ε avec l'hypocycloïde sont imaginaires (**39**), dans le second, ils sont réels.

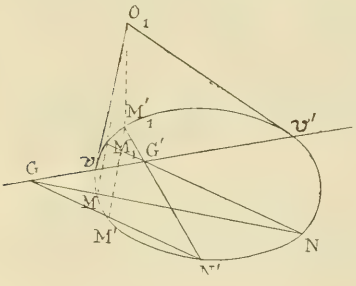


Fig. 11.

Plaçons-nous dans ce second cas et supposons donc le centroïde O_1 extérieur à l'ellipse ε (fig. 11). Soient v et v' les points de contact des tangentes menées de O_1 à l'ellipse et soient NM et NM_1 les deux tangentes secondaires menées par

un point quelconque N de ε à $\mathcal{H}'_A$, M et M_1 étant les points primaires; la droite MM_1 passe par O_1. Les tangentes NM et NM_1 coupent la droite vv' en deux points G et G′ qui, lorsque N se déplace sur ε, se correspondent dans une involution dont v et v' sont les points doubles. Cela posé, on peut considérer les cas particuliers suivants :

1° Supposons que la droite O_1MM_1 coïncide avec O_1v; la tangente NM se confond avec NM_1 et N est alors son point de contact avec $\mathcal{H}'_A$. Donc *les tangentes menées à une* $\mathcal{H}_3$ *par les points de rencontre de cette courbe avec une ellipse tritangente coupent une seconde fois cette ellipse en des points qui sont les points de contact des tangentes menées à cette ellipse par son centroïde.*

2° Supposons que les points M et N coïncident; la droite GMN est alors tangente à l'ellipse et à $\mathcal{H}'_A$, donc N est l'un des points de contact de ces deux courbes; NM_1 coïncide avec MM_1 et passe par O_1. Par conséquent,

Les secondes tangentes menées à une $\mathcal{H}_3$ *par ses points de contact avec une ellipse tritangente* ε, *ou, ce qui revient au même, avec les côtés d'un triangle principal, concourent en un même point* O_1, *qui est le centroïde de* ε *par rapport à l'hypocycloïde.*

Ces secondes tangentes coupent l'hypocycloïde en trois nouveaux points; les tangentes en ces points sont perpendiculaires aux côtés du triangle principal formé par les tangentes communes à ε et à $\mathcal{H}'_A$; ces tangentes sont donc les hauteurs de ce triangle et, par suite, elles concourent en un même point. Donc :

Les secondes tangentes menées à une $\mathcal{H}_3$ *par les points de contact de trois tangentes concourantes passent par un même point.*

Réciproquement, *si par un point on mène à une* $\mathcal{H}_3$ *trois tangentes, les tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par ces trois tangentes sont les côtés et les hauteurs d'un même triangle principal.*

3° Soit $GM'N'$ une autre tangente menée par G à $\mathcal{H}'_A$ et soit M'_1 le point de rencontre de O_1M' avec ε; la droite $G'N'M'$

sera aussi tangente à $\mathcal{C}'_A$. Si l'on suppose que GM'N' et GMN se confondent, il en sera de même de G'M$_1$N et G'M$'_1$N'; par conséquent, les points G et G' sont alors deux des points d'intersection de la droite vv' avec $\mathcal{C}'_A$. Donc *les points de rencontre de la droite vv' avec l'hypocycloïde se correspondent deux à deux dans l'involution dont v et v' sont les points doubles.*

On déduit de là une nouvelle génération des ellipses ε :

Soient G$_1$, G$_2$, G$_3$, G$_4$ *les points de rencontre d'une droite fixe avec une* $\mathcal{C}_3$ *et soient* G *et* G' *deux points variables de cette droite, se correspondant dans une des involutions déterminées par les points* G$_1$, G$_2$, G$_3$, G$_4$ *pris deux à deux. Le point d'intersection de deux des tangentes menées par* G *et* G' *à l'hypocycloïde décrit une ellipse tritangente à cette courbe.*

51. Considérons encore deux ellipses ε et ε' tritangentes à $\mathcal{C}_A$ et proposons-nous de trouver les points d'intersection de ces courbes. Soient (fig. 10) V et W le point primaire et le point secondaire sur ε de l'une des tangentes menées à H_A par le point bigénérateur P des deux ellipses; faisons coïncider la corde variable M*m* avec VW; la tangente primaire en V est VW et, par conséquent, K coïncide avec W; le point W appartient donc à ε'. On voit donc que trois des points d'intersection de ε et ε' sont les points secondaires W, W$_1$, W$_2$, sur chacune des deux ellipses, des tangentes menées à $\mathcal{C}_A$ par leur point bigénérateur. On obtient le quatrième point d'intersection W$_3$ en faisant coïncider la corde M*m* avec PO$_1$.

52. Examinons le cas où les ellipses ε et ε' sont tangentes; cela peut arriver soit que deux des points W, W$_1$, W$_2$ coïncident, soit que l'un de ces points se confonde avec W$_3$. Supposons, par exemple, que W et W$_1$ coïncident; la droite PW est tangente à $\mathcal{C}_A$ et son point de contact est alors P. Donc :

Le lieu géométrique du point bigénérateur de deux ellipses tritangentes à $\mathcal{C}_A$ *et tangentes entre elles est l'hypocycloïde* $\mathcal{C}_A$ *elle-même.*

Nous laissons au lecteur le soin de développer le cas où W$_3$

coïnciderait avec l'un des points W, W_1, W_2; on trouve que les ellipses ε, ε' touchent alors $\mathfrak{H}_A$ en un même point et que le point P se trouve sur la seconde tangente menée à $\mathfrak{H}_A$ par ce point.

53. Les formules (5) peuvent s'écrire

$$X' = \frac{2a}{a+b} X_1, \quad Y' = \frac{2b}{a+b} Y_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Elles définissent une transformation homographique et permettent de déduire le lieu de O', centre de ε', du lieu de P qui a été trouvé au paragraphe précédent. Les équations de l'ellipse ε et du cercle ω' par rapport à l'origine A_4 sont respectivement

$$a^2(y - b\sin\alpha)^2 + b^2(x + a\cos\alpha)^2 = a^2b^2,$$
$$x^2 + y^2 + (a+b)\,x\cos\alpha - (a+b)\,y\sin\alpha = 0.$$

Les formules (7) transforment la première de ces équations dans la seconde; donc la transformée de ε est le cercle ω'. Le binôme $x^2 + y^2$ se transforme en $4(a^2x^2 + b^2y^2) : (a+b^2)$; donc les points cycliques ont pour transformés les points de rencontre de la droite de l'infini avec une ellipse égale à ε et ayant ses axes perpendiculaires aux axes correspondants de ε. Donc :

Étant donnée une ellipse fixe ε tritangente à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}_A$, le lieu du centre d'une ellipse variable ε', tritangente à $\mathfrak{H}_A$ et tangente à ε est une courbe du quatrième ordre et de la troisième classe $\varkappa$, tritangente au cercle ω' tritangent à $\mathfrak{H}_A$, ayant trois points de rebroussement et bitangente à la droite de l'infini aux points où cette droite est rencontrée par une ellipse égale à ε et ayant ses axes perpendiculaires à ceux de ε.

Si l'on suppose que ε' oscule ε en un point autre que l'un des points de contact de ε avec $\mathfrak{H}_A$, les points W, W_1, W_2 coïncident et P est l'un des points de rebroussement de $\mathfrak{H}_A$. Donc *on peut mener trois ellipses tritangentes à $\mathfrak{H}_A$ et osculatrices à ε. Les points d'osculation sont situés sur les tangentes de rebrous-*

sement de $\mathfrak{H}_A$ et les centres de ces ellipses sont les points de rebroussement de la courbe $\varkappa$.

54. Étant donnés l'ellipse ε et le point A_1 de cette courbe, proposons-nous de mener par un point donné P (α, β) des tangentes à l'hypocycloïde correspondante $\mathfrak{H}_A$.

Soient x, y les coordonnées du point primaire M d'une telle tangente, et x_1, y_1 celles de A_1; les coordonnées des points A et L′ (fig. 5) seront $(x_1, y_1' = \frac{a}{b} y_1)$, $(x, -\frac{a}{b} y)$. En exprimant que les droites MP, AL′ sont parallèles, on trouve

$$b(y - \beta)(x - x_1) + a(x - \alpha)(y + y_1), \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ou

$$(a + b)xy - (b\beta - ay_1)x - (a\alpha + bx_1)y + b\beta x_1 - a\alpha y_1 = 0. \quad (9)$$

Si x, y sont des coordonnées courantes, l'équation (9) représente une hyperbole coupant ε au point $A_4(x_1, -y_1)$ et aux points primaires M, M_1, M_2 des tangentes menées de P à $\mathfrak{H}_A$; cette hyperbole passe aussi par P et ses asymptotes sont parallèles aux axes de ε.

On peut encore arriver à cette courbe auxiliaire comme suit. Les droites AL′, MA_4 se coupent en un point δ de BC. Or lorsqu'on joint un point δ mobile sur BC aux points A, A_4, la droite $A_4\delta$ et la parallèle menée par P à $A\delta$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs; par suite, leur point d'intersection engendre une conique passant par A_4, par P, et par les points à l'infini sur les axes de ε. Les points cherchés M, M_1, M_2 appartiennent évidemment à cette hyperbole.

55. L'hyperbole (9) passe par O lorsque

$$b\beta x_1 - a\alpha y_1 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{ay_1}{bx_1} = \frac{y_1'}{x_1}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ce qui suppose P sur la droite OA. On peut alors l'identifier avec l'hyperbole d'Apollonius d'un point $R(x_2, y_2)$ représentée par

$$c^2xy + b^2y_2x - a^2x_2y = 0;$$

il suffit de poser

$$a - b = -\frac{b^2 y_2}{b\beta - a y_1} = \frac{a^2 x_2}{a\alpha + b x_1}.$$

De ces relations, on déduit

$$x_2 = \frac{a-b}{a^2}(a\alpha + b x_1), \quad y_2 = \frac{a-b}{b^2}(a y_1 - b\beta),$$

$$\alpha = \frac{a x_2}{a-b} - \frac{b x_1}{a}, \quad \beta = -\frac{b y_2}{a-b} + \frac{a y_1}{b}.$$

En portant les valeurs de α et β dans la relation (10), on trouve

$$c^2 x_1 y_1 - a^2 x_2 y_1 + b^2 y_2 x_1 = 0;$$

il en résulte que R est sur la normale menée à ε en A_1.

On obtient toutes les tangentes de $\mathcal{G}_A$ en déplaçant P sur OA, ou R sur la normale en A_1 à ε, et comme P est sur l'hyperbole d'Apollonius du point R, on a le théorème suivant :

On construit l'hyperbole d'Apollonius d'un point R *mobile sur la normale au point fixe* A_1 *de l'ellipse* ε; *cette hyperbole coupe* ε *en* A_1 *et aux points* M, M_1, M_2 *et elle rencontre les diamètres* OA, OA′ *aux points* P, P′. *Les droites* PM, PM_1, PM_2 *enveloppent une hypocycloïde* $\mathcal{G}_A$ *et les droites* P′M, $P'M_1$, $P'M_2$ *une seconde hypocycloïde* $\mathcal{G}'_A$.

56. De l'égalité $a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$, on déduit

$$\frac{a(y + y_1)}{b(x - x_1)} = -\frac{b}{a}\frac{x + x_1}{y - y_1};$$

cette relation permet de transformer l'égalité (8) en celle-ci :

$$a(y - \beta)(y - y_1) - b(x - \alpha)(x + x_1) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$a y^2 - b x^2 - a(y_1 + \beta) y - b(x_1 - \alpha) x + a\beta y_1 + b\alpha x_1 = 0. \quad (11)$$

Si l'on considère x, y comme coordonnées courantes, l'équation (11) représente une hyperbole passant par les points P, A_2 et ayant pour centre le milieu de la droite PA_2; les axes sont parallèles à ceux de ε et sont proportionnels à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$. Par conséquent, on peut énoncer le théorème suivant :

Par un point fixe A_2 *d'une ellipse* ε *on peut faire passer une hyperbole variable* η *dont les axes sont parallèles aux axes de* ε *et sont proportionnels aux racines carrées de ces axes. Les droites qui joignent les points d'intersection, autres que* A_2, *de* ε *et* η, *au point diamétralement opposé à* A_2 *sur* η *enveloppent une hypocycloïde* $\mathfrak{H}_A$ *tritangente à* ε *et dont la grandeur ne change pas avec la position de* A_2 *sur* ε.

Une proposition analogue s'applique à l'hypocycloïde $\mathfrak{H}'_A$, sauf à remplacer l'hyperbole η par une ellipse.

57. Projetons orthogonalement la figure précédente de façon que les ellipses ou les hyperboles η se projettent suivant des cercles ou des hyperboles équilatères. Dans le premier cas, les droites PM et A_2M sont rectangulaires; dans le second, ces droites sont également inclinées sur la bissectrice de l'angle des axes de ε. On en conclut :

La courbe antipodaire d'une ellipse ε' (*) *par rapport à un point* A_2 *de cette courbe est une projection orthogonale d'hypocycloïde à trois rebroussements. L'aire de cette courbe est indépendante de la position de* A_2 *sur* ε'. *Ce théorème s'applique aussi à l'enveloppe d'une droite* δ *passant par un point variable* M *de* ε *et telle que les droites* δ *et* A_2 *soient également inclinées sur la bissectrice de l'angle des axes de* ε'.

58. Soient $2a'$, $2b'$ les axes de ε'. On voit facilement que la projection du second cercle de Chasles de ε est une ellipse ayant pour axes $2\frac{a'^2-b'^2}{a'}$, $2\frac{a'^2-b'^2}{b'}$. D'autre part, les points de contact

(*) La nature de cet antipodaire a été établie différemment par LAGUERRE (*OEuvres complètes*, t. II, p. 584. BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, 1879). Ce théorème ne diffère pas essentiellement de celui qui a été démontré au § 36.

de ε' avec son antipodaire sont les points d'incidence des normales menées par A_2 à ε'. D'après cela, les résultats trouvés au § 23 nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

On peut circonscrire à une ellipse ε' une infinité de triangles tels que les normales menées à ε' aux points de contact des côtés de chacun d'eux avec ε' concourent en un même point de ε'. Ces triangles sont inscrits à une ellipse fixe ε'' coaxiale avec ε' et ayant pour axes $2\frac{a'^2-b'^2}{a'}$, $2\frac{a'^2-b'^2}{b'}$. Le lieu de leurs centres de gravité est une ellipse semblable à ε'', etc. (*).

59. Dans son célèbre mémoire sur l'hypocycloïde (**), Steiner fait connaître sans démonstration le théorème très curieux que nous énonçons ainsi :

ABC *étant un triangle principal d'une* $\mathfrak{K}_3$, *si l'on inscrit à ce triangle une conique quelconque passant par l'orthocentre* H, *la tangente à cette courbe au point diamétralement opposé à* H *touche constamment l'hypocycloïde* H_3.

« C'est le professeur Schäfli, dit-il, qui a attiré mon attention sur cette propriété. » Cremona démontre le théorème Schäfli-Steiner en s'appuyant sur des théories très générales. Je vais donner ici une démonstration directe d'une proposition plus générale.

Soit D un point fixe; considérons une conique variable Σ inscrite au triangle ABC et passant par D et cherchons l'enveloppe de la tangente menée à Σ au point J diamétralement opposé à D.

Si cette tangente coupe BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1 (fig. 12), on sait que les couples de droites (DA, DA_1), (DB, DB_1), (DC, DC_1), joignant le point D aux sommets du quadrilatère complet AB_1A_1B, sont en involution et que les couples de tangentes menées de D à une conique inscrite à ce quadrilatère appartiennent à cette involution. Dans la conique passant par D,

(*) Ce théorème a été signalé par M. Faure, *Nouvelles Annales*, 1871, p. 46.

(**) Crelle, livre III, pp. 231-237; *OEuvres complètes*, II, p. 646.

ces deux tangentes sont confondues, donc la tangente DX menée en D à Σ est un rayon double de l'involution. Coupons ce faisceau par la droite $A_1B_1C_1$ et soient A′, B′, C′ les points de rencontre de cette droite avec DA, DB, DC. Les droites DX, $A_1B_1C_1$ sont parallèles, donc les points A′, B′, C′ correspondent à $A_1B_1C_1$ dans une involution dont un point double est à l'infini et les segments A_1A', B_1B', C_1C' ont un milieu commun M.

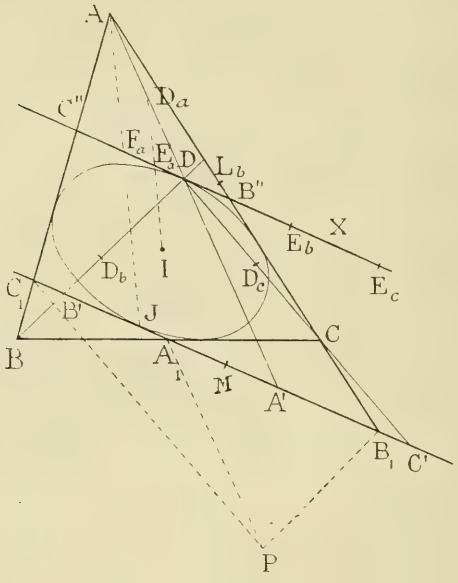


Fig. 12.

Soit P le symétrique de D par rapport à M; les droites PA_1, PB_1, PC_1 sont respectivement parallèles à DA, DB, DC. Donc :

Si D *et* J *sont deux points diamétralement opposés sur une conique* Σ *inscrite au triangle* ABC, *et si* A_1, B_1, C_1 *désignent les points de rencontre de* BC, CA, AB, *avec la tangente en* J *à* Σ, *les parallèles menées par* A_1, B_1, C_1 *à* DA, DB, DC *concourent en un même point* P.

Lorsque D est l'orthocentre de ABC, $A_1B_1C_1$ est la pédale de P et l'on retrouve le théorème de Schäfli-Steiner.

60. Si l'on construit une conique circonscrite au quadrangle ABCD, cette conique détermine sur $A_1B_1C_1$ un couple de points α, α' qui se correspondent dans l'involution (A_1A', B_1B', B_1C') et qui sont donc symétriques par rapport à M. Si D est l'orthocentre, M se trouve sur le cercle d'Euler. Donc *l'enveloppe d'une corde d'une hyperbole équilatère dont le milieu décrit une circonférence passant par le centre de l'hyperbole est une* $\mathfrak{G}_3$.

Cette proposition résulte aussi très simplement des propriétés des diamètres conjugués de l'hyperbole équilatère.

Deux positions particulières du couple $\alpha\alpha'$ méritent d'être considérées : 1° si α est à l'infini, α' est aussi à l'infini ; si α coïncide avec M, α' coïncide aussi avec M. On a donc les propositions suivantes, dont la première est bien connue :

L'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est l'hypocycloïde de Steiner de ce triangle.

L'enveloppe des tangentes menées à une hyperbole équilatère variable circonscrite à un triangle aux points où cette courbe rencontre le cercle d'Euler de ce triangle est l'hypocycloïde de Steiner.

61. Proposons-nous de chercher le lieu du point J, ou, ce qui revient au même, *le lieu du centre* I *d'une conique* Σ *inscrite au triangle* ABC *et passant par le point fixe* D. Ce problème est ordinairement traité par l'analyse (*); la solution suivante est peut-être nouvelle. Soient A'', B'', C'' (fig. 12) les points de rencontre de la tangente DX à Σ avec BC, CA, AB et (D_a, D_b, D_c), (E_a, E_b, E_c) les milieux des droites DA, DB, DC et B''C'', C''A'', A''B''. D'après un cas particulier d'un théorème de Newton, le lieu des centres des coniques qui touchent AB'', AC'', B''C'', la dernière droite en D est la droite D_aE_a. Le centre I est donc à l'intersection des droites D_aE_a, D_bE_b, D_cE_c, et si F_a, F_b, F_c désignent les symétriques de D par rapport à E_a, E_b, E_c, le point J sera à l'intersection des droites AF_a, BF_b, CF_c. Or, lorsque A''B''C'' tourne autour de D, le lieu de F_a est une hyperbole

(*) Voir SALMON, *Sections coniques*, p. 373.

ayant pour asymptotes AB et AC. Toute droite menée par A rencontre cette hyperbole en deux points φ, φ', dont chacun peut être pris pour F_a et donne un point J correspondant; le lieu de J est donc une conique Σ'.

Lorsque $\varphi\varphi'$ coïncide avec AC, les points φ et φ' coïncident et sont tous deux à l'infini; la droite $A''C''$ est alors parallèle à AC et la droite BF_b coupe AF_a ou AC au point L_b isotomique sur AC du point de rencontre de BD avec AC; Σ' touche donc AC en ce point. Par conséquent, *le lieu du point* J *diamétralement opposé à* D *sur la conique variable passant par* D *et inscrite au triangle* ABC *est la conique* Σ' *qui touche les côtés de* ABC *aux points isotomiques des points de rencontre de ces côtés avec les droites* DA, DB, DC.

En particulier, si D est l'orthocentre, Σ' est l'ellipse ε trouvée précédemment, qui touche les côtés de ABC en leurs points de contact avec l'hypocycloïde de Steiner de ce triangle.

NOTES

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

PAR

J. NEUBERG
(Liége)

NOTES

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

Ces notes ont été rédigées à l'occasion d'un mémoire de M. Gob que j'ai eu l'honneur de présenter à la Société Royale des sciences de Liége. La riche littérature sur la *courbe merveilleuse* mérite déjà plus qu'une simple bibliographie ; une monographie qui exposerait tous les résultats connus et établirait des rapprochements entre les méthodes employées par les différents auteurs, offrirait un intérêt considérable. Le travail actuel n'a pas cette prétention; j'y consigne de simples remarques suggérées par l'examen des écrits sur la matière, par-ci par-là des démonstrations nouvelles et des propriétés nouvelles. La reproduction de choses très connues s'impose ici pour la clarté de l'exposé.

Pour abréger le discours, je désignerai la courbe par le mot hypocycloïde, sans ajouter l'un des qualificatifs *à trois rebroussements, tricuspide,* de *Steiner* ou de *Ferrers.*

I

1. On rencontre de nombreuses générations tangentielles de l'hypocycloïde. Pour les comparer entre elles, je pars de celle-ci :

Deux points M, M′ *se meuvent sur une circonférence de cercle* (cercle tritangent, centre ω, rayon R) *en sens opposés, le second*

avec une vitesse double de celle du premier. La corde MM′ *enveloppe une hypocycloïde* (fig. 1).

Avec M. Gob, j'appellerai M le *point primaire*, M′ le *point secondaire* de la tangente et je dirai aussi que la droite MM′ est une *tangente primaire* en M, une *tangente secondaire* en M′.

On obtient toutes les tangentes en faisant parcourir à M une fois la circonférence ω; le point M′ parcourra alors deux fois cette courbe. Il résulte de là qu'en tout point du cercle ω, il

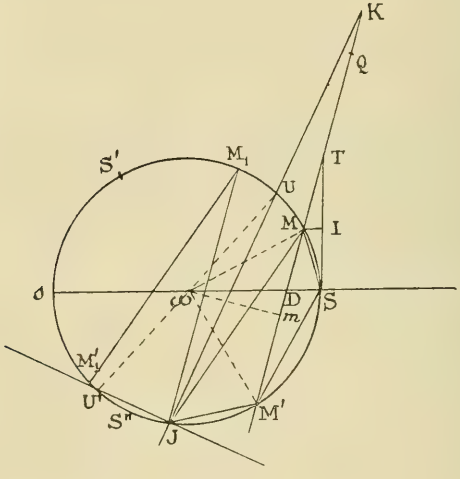


Fig. 1.

passe une seule tangente primaire, mais deux tangentes secondaires; par suite, l'enveloppe de la droite MM′ est de la troisième classe.

Les deux mobiles M, M′ se rencontreront en trois points S, S′, S″, qu'on appelle les *sommets* de la courbe; l'hypocycloïde touche en ces points la circonférence ω.

Pour simplifier, on peut faire partir les deux mobiles d'un sommet S.

2. L'angle $S\omega M = \mu$ fixe le point M et, par suite, la tangente MM′. Menons ωm perpendiculaire à MM′. L'angle $M'\omega D = 2\mu$,

d'où l'on déduit : *angle* $m\omega D = \frac{1}{2}\mu$, *angle* $SDM = \frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{2}$. On peut maintenant transformer la première définition ainsi :

Un rayon ωM *d'une circonférence tourne autour du centre; une droite* MM′, *attachée à son extrémité, tourne en même temps autour de* M *avec une vitesse angulaire de sens contraire et égale à la moitié de celle de* ωM.

Ou encore : *Un rayon* ωM′ *d'une circonférence tourne autour du centre; une droite* M′M, *attachée à son extrémité, tourne en même temps autour de* M′ *avec une vitesse angulaire de même sens et égale au quart de celle de* ωM′.

Dans ces deux cas, l'enveloppe de la droite MM′ est une hypocycloïde.

3. Soit J un point fixe de la circonférence ω; les vitesses angulaires des cordes JM, JM′ étant la moitié de celles des rayons ωM, ωM′, on peut énoncer les propositions suivantes :

Par un point fixe J *d'une circonférence* ω, *on mène une corde variable* JM *et par l'extrémité* M *une seconde corde* MM′. *Si ces cordes tournent avec des vitesses angulaires égales et de sens contraires, la seconde corde enveloppe une hypocycloïde.*

Une corde JM′, *d'une circonférence* ω, *tourne autour de son extrémité* J *supposée fixe. Une seconde corde* M′M *tourne dans le plan avec une vitesse angulaire de même sens et égale à la moitié de celle de* JM′. *La droite* MM′ *enveloppe une hypocycloïde.*

4. Menons JM_1 parallèle à MM′; les droites JM, JM_1, animées de vitesses angulaires égales et de sens contraires, se correspondent dans une involution par symétrie dont les éléments doubles sont deux droites rectangulaires JU, JU′. Ces dernières sont évidemment les deux tangentes secondaires qu'on peut mener par J. Le point J étant quelconque, on voit que *le cercle* ω *est le lieu du point de concours de deux tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde.*

Remarquons maintenant la définition suivante :

Deux faisceaux en involution par symétrie ont leur sommet en un point J *d'une circonférence. Soient* M, M_1 *les points de*

rencontre de la circonférence avec deux rayons conjugués; les parallèles MM' *à* JM_1 *et* M_1M_1' *à* JM *enveloppent une hypocycloïde.*

La courbe peut être engendrée par ce procédé d'une infinité de manières : le point J est arbitraire et les rayons doubles JU, JU′ sont les tangentes secondaires menées par J. Pour la construction, on prendra des arcs égaux $UM = UM_1$.

H. Schröter a énoncé ainsi la définition précédente :

On donne deux ponctuelles projectives, l'une sur une circonférence ω, *l'autre sur la droite de l'infini, et telles que les points cycliques se correspondent doublement. La droite qui joint deux points homologues quelconques de ces ponctuelles enveloppe une hypocycloïde.*

5. Beaucoup d'applications se résolvent facilement au moyen de la première génération donnée au § 3. Par exemple, si J est un point fixe d'une circonférence ω et PR une corde variable mais de direction donnée, les droites JP, JR ont des vitesses angulaires égales et de sens contraires; par suite, les droites suivantes enveloppent des hypocycloïdes tritangentes au cercle ω:

a) Les symétriques des droites JP, JR par rapport à PR;

b) Les parallèles à JP par R et à JR par P;

c) Les hauteurs PP′, RR′ du triangle JPR.

Les deux derniers cas se ramènent l'un à l'autre en substituant au point fixe J le point diamétralement opposé sur la circonférence ω.

6. La génération suivante a été indiquée par M. Brocard :

On donne un cercle ω *tangent à une droite* ST *en* S (fig. 1). *D'un point quelconque* M *de la circonférence on mène* MI *perpendiculaire à* ST *et l'on prend* $IT = SI$. *La droite* MT *enveloppe une hypocycloïde tritangente au cercle* ω.

La proposition résulte immédiatement de ce qu'une tangente MM′ et SM forment un triangle isocèle avec le diamètre Sω et aussi avec la tangente en S.

On pourrait aussi mener une corde quelconque SM′, prendre

sur la tangente menée en S une longueur ST = SM′ et joindre TM′.

Un procédé tout semblable peut être employé avec une tangente quelconque MM′ qui remplacerait ST. Car si UJ est une tangente quelconque, l'arc MU étant la moitié de l'arc M′J, on voit facilement que les triangles UM′K et MJK sont isocèles. La note III développera les conséquences qu'on peut tirer de ce procédé.

7. Soient A_1, B_1, C_1 (fig. 2) les projections orthogonales d'un point quelconque P d'une circonférence de centre O et de

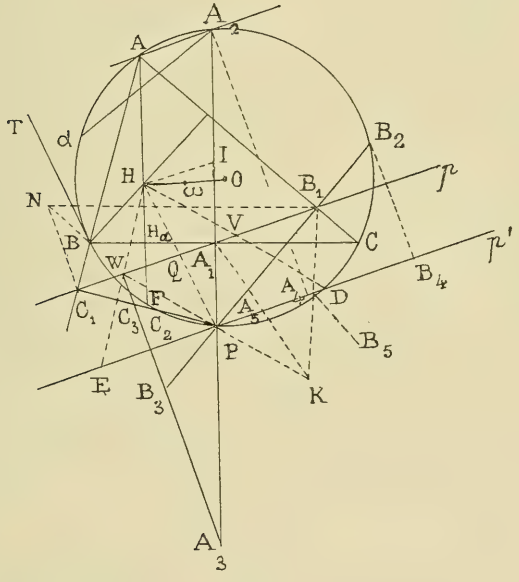


Fig. 2.

rayon 2R, sur les côtés d'un triangle inscrit ABC. On sait que ces points sont situés sur une même droite *p*, appelée *droite de Simson*, *droite de Wallace* ou *pédale* de P.

C'est Steiner qui a énoncé le premier que l'enveloppe de la droite *p*, lorsque P parcourt la circonférence O, est une hypo-

cycloïde. Pour rattacher ce théorème à ce qui précède, nous rappelons, avec la démonstration, deux propriétés de la droite p.

Les droites PA_1, PB_1, PC_1 recoupent la circonférence O en A_2, B_2, C_2. Le quadrilatère PA_1B_1C étant inscriptible, l'angle $AB_1A_1 = A_1PC = A_2AC$; donc p est parallèle aux droites AA_2, BB_2, CC_2 (*).

La hauteur AHH_a rencontre la circonférence O au symétrique F de l'orthocentre H par rapport à son pied H_a. Si donc on prend sur PA_1 la longueur $A_1I = PA_1$, les droites HI et FP sont symétriques par rapport à BC; d'où l'on conclut facilement que HI est parallèle à AA_2. Il en résulte que la droite p, qui est parallèle à HI et passe au milieu de PI, passe aussi au milieu Q de la droite HP.

Soit ω le milieu de HO; on a $\omega Q = \frac{1}{2}\,OP = R$. Donc le lieu de Q est la circonférence des neuf points du triangle ABC.

Cela posé, la parallèle p' à p menée par P enveloppe une hypocycloïde tritangente au cercle O (§ 5). Par conséquent, la droite p qui correspond à p' dans une homothétie de centre H enveloppe également une hypocycloïde; le cercle tritangent est maintenant le cercle des neuf points du triangle ABC.

Pour construire les droites de Simson, il suffit de mener une corde quelconque PA_2 perpendiculaire à BC et de tracer par son point de rencontre A_1 avec BC des parallèles à AA_2 et AP. On a donc le théorème suivant :

Étant donnés une circonférence O, *un point* A *sur cette courbe et une corde* BC, *on projette un point quelconque* A_2 *de la courbe en* A_1 *sur* BC, *et par* A_1 *on mène une parallèle à la corde* AA_2; *cette parallèle enveloppe une hypocycloïde.*

Si l'on remplace le sommet A du triangle ABC par un autre point α de la circonférence O, la droite AA_2 tourne d'un angle constant égal à la moitié de l'angle $AO\alpha$; il en sera de même des droites p et p'. Par conséquent :

a) Si *les tangentes à une hypocycloïde tournent autour de leurs*

(*) Les figures 1 et 2 ne portent pas toutes les lignes ni tous les points dont il est question dans le texte.

points primaires d'un angle constant δ, *elles envelopperont une nouvelle hypocycloïde, qui n'est autre que la première tournée de l'angle* $\frac{2\delta}{3}$ *autour du centre du cercle tritangent.*

Ce théorème pourrait se conclure immédiatement du § 1. Une proposition analogue s'applique aux tangentes tournant d'un même angle autour de leurs points secondaires.

b) Si *les tangentes à une hypocycloïde tournent d'un même angle autour de leur point d'intersection avec une tangente fixe, elles continuent à envelopper une hypocycloïde.*

Soient H′ l'orthocentre et ω' le centre du cercle des neuf points du triangle αBC. Comme $AH = \alpha H'$, la droite $\omega\omega'$ est parallèle à la corde Aα et égale à la moitié de cette ligne. Le lieu de ω', lorsque α parcourt la circonférence, est une circonférence décrite du milieu du côté BC comme centre avec le rayon R.

Lorsque α tend vers B, le côté AB du triangle fondamental ABC tend vers la tangente BT au cercle O. D'où ce cas particulier :

Étant tracées en un même point B *d'une circonférence* O *une corde* BC *et la tangente* BT, *la droite qui unit les projections d'un point quelconque de la circonférence sur les deux droites enveloppe une hypocycloïde.*

P. Serret définit la droite p' ainsi :

Si un rayon lumineux p'' *passant par l'orthocentre* H *d'un triangle* ABC *est réfléchi par chacun des côtés, les trois rayons réfléchis concourent en un point* P *de la circonférence* ABC. La parallèle p' à p'', menée par le point P, *enveloppe une hypocycloïde.*

8. Faisons tourner les droites PA_1, PB_1, PC_1 (fig. 2) d'un même angle δ autour de P ; soient alors A_1', B_1', C_1' leurs points de rencontre avec les côtés correspondants du triangle ABC, et A_2', B_2', C_2' les points où elles vont couper la circonférence O. Les points A_1', B_1', C_1' sont situés sur une même droite p_δ, *pédale oblique* de P. On démontre facilement que p_δ est parallèle aux droites AA_2', BB_2', CC_2'. Désignons par p_δ' la parallèle à p_δ menée par P.

L'enveloppe de la droite p'_δ est encore une hypocycloïde; car la droite PA'_2 a une direction constante.

La droite p_δ enveloppe également une hypocycloïde. (Voir le Mémoire de M. Gob.) Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Étant donnés une corde BC *d'une circonférence et un point* A *sur cette courbe, on mène une corde variable* PA'_2, *de direction fixe, qui coupe* BC *en un point* A'_1; *les parallèles menées par* A'_1 *aux cordes* AP, AA'_2 *enveloppent une hypocycloïde.*

Ces parallèles peuvent être considérées comme des pédales obliques des points P et A'_2 par rapport au triangle ABC.

Cependant, lorsqu'on remplace BC par une droite qui ne rencontre pas la circonférence O, les droites AP, AA'_2 sont toujours des tangentes à une hypocycloïde, mais elles cessent de jouer le rôle de pédales (réelles).

II

9. En rapportant l'hypocycloïde aux deux diamètres rectangulaires ωS, $\omega\eta$ du cercle tritangent (fig. 1), on a, pour l'équation de la tangente MM',

$$x\cos\frac{\mu}{2} - y\sin\frac{\mu}{2} = R\cos\frac{3\mu}{2}. \qquad (1)$$

En dérivant cette équation deux fois par rapport à μ et en l'intégrant par rapport à cette variable, on trouve

$$x\sin\frac{\mu}{2} + y\cos\frac{\mu}{2} = 3R\sin\frac{3\mu}{2}, \qquad (2)$$

$$x\cos\frac{\mu}{2} - y\sin\frac{\mu}{2} = 9R\cos\frac{3\mu}{2}, \qquad (3)$$

$$x\sin\frac{\mu}{2} + y\cos\frac{\mu}{2} = \frac{1}{3}R\sin\frac{3\mu}{2}. \qquad (4)$$

L'équation (2) représente une droite perpendiculaire à MM' et passant par le point de contact Q de MM' avec son enveloppe,

c'est-à-dire la normale QQ′ à l'hypocycloïde; la distance de cette droite à l'origine étant égale à $3m\mathrm{M}$, on conclut que Q est le symétrique de M′ par rapport à M.

L'équation (2) est de la même forme que (1), sauf le changement de $\frac{\mu}{2}$ en $\frac{\mu}{2}+\frac{\pi}{2}$ et de R en 3R; par conséquent, l'enveloppe des normales (ou la développée) d'une hypocycloïde est une seconde hypocycloïde dont le cercle tritangent passe par les points de rebroussement de la première.

L'équation (3) représente la normale à la développée; la distance des deux droites (1) et (3) est donc égale au rayon de courbure de l'hypocycloïde donnée; ce rayon vaut donc $8\omega m$.

Enfin, l'équation (4) représente la tangente à une développante de l'hypocycloïde donnée; la distance de cette droite à l'origine ω étant égale à $\frac{1}{3}m\mathrm{M}$; on voit que la droite MM′ est normale à une certaine hypocycloïde en un point qui la divise additivement dans le rapport 1 : 2.

10. Si l'on pose $\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}=t$, l'équation (1) se transforme en

$$yt^3-(x+\mathrm{R})t^2+yt+\mathrm{R}-x=0. \tag{5}$$

Elle détermine les inclinaisons des trois tangentes menées à l'hypocycloïde par un point quelconque (x, y). Les racines t_1, t_2, t_3 vérifient la relation

$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=1, \tag{6}$$

ou

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3=(2n+1)\pi.$$

Ainsi, la *somme des inclinaisons, sur un axe de la courbe, des tangentes issues d'un même point est constante,* égale à un multiple impair de π.

III

11. Soient MM′, NN′ deux tangentes (fig. 5) à l'hypocycloïde; la première est supposée fixe, la seconde variable. Les relations (§ 6)

$$NK = NM', \qquad MK = MN',$$

où K désigne le point de rencontre des deux tangentes, conduisent rapidement à quelques propriétés de la courbe.

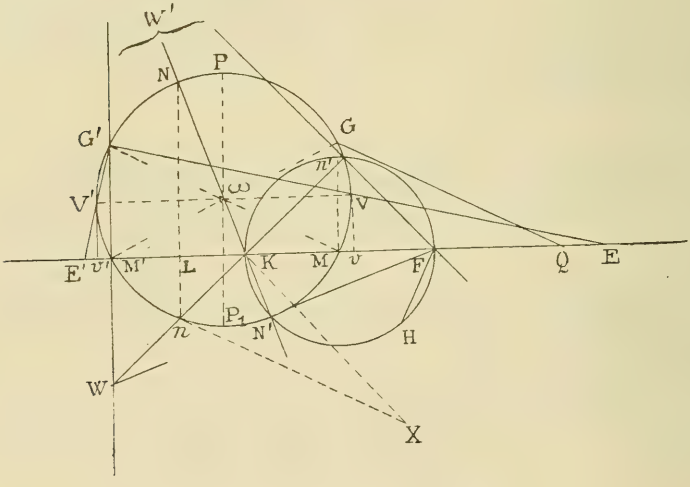


Fig. 3.

Pour trouver les tangentes issues d'un point K donné sur MM′, élevons une perpendiculaire au milieu L de M′K; cette droite rencontre la circonférence tritangente ω aux points primaires N, *n* des tangentes cherchées NKN′, *n*K*n*′.

Considérons quelques positions particulières de la droite N*n*.

a) Lorsque N*n* passe par le centre ω, on voit que *par tout point* M *du cercle tritangent* ω *il passe deux tangentes secondaires*

MP, MP_1 *qui sont à angle droit* (§ 4) *et une tangente primaire* MM′ *qui est perpendiculaire au diamètre joignant les points primaires des deux premières tangentes.*

b) Menons les cordes MG, M′G′ perpendiculaires à MM′, et soit Q le symétrique de M′ par rapport à M.

Si L coïncide avec M, KN devient QG et K*n* se confond avec MM′. Il résulte de là que *le point de contact d'une tangente* MM′ *est le symétrique de son point secondaire par rapport à son point primaire.*

c) En remplaçant N*n* par G′M′, on obtient pour l'une des tangentes M′G′ et pour l'autre la symétrique de la tangente en M′ au cercle ω par rapport à M′G′, c'est-à-dire une perpendiculaire au diamètre MG′. C'est la propriété *a* sous cette nouvelle forme : *Les tangentes secondaires menées en un point du cercle tritangent sont les bissectrices des angles formés par la tangente primaire à l'hypocycloïde et la tangente au cercle en ce point.*

d) Prenons pour N*n* les tangentes V*v*, V′*v*′ au cercle ω, et soient E, E′ les symétriques de M′ par rapport à *v* et *v*′. On voit aisément que les droites EV, E′V′ concourent en G′ ; comme les deux tangentes menées de E ou de E′ coïncident, leurs points de contact avec l'hypocycloïde sont les points E, E′. Par conséquent :

La tangente MM′ *en un point quelconque* Q *de l'hypocycloïde rencontre cette courbe en deux autres points* E, E′, *tels que les tangentes en ces points sont rectangulaires et se coupent sur le cercle tritangent, au point primaire de la tangente perpendiculaire à* MM′. *La distance* EE′ *est constante, égale à* 4R; *son point milieu est le point primaire* M *de* MM′.

e) Les tangentes menées par un point de MM′ situé en dehors du segment EE′, c'est-à-dire extérieur à l'hypocycloïde, sont imaginaires.

12. Les bissectrices des angles formés par les droites M′N, M′*n* étant M′V et M′V′, celles des angles des tangentes KN, K*n* sont parallèles aux droites EV, E′V′. Ainsi, *si d'un point* K *mobile sur une tangente fixe* MM′ *on mène deux nouvelles tangentes, les*

bissectrices de ces dernières droites sont toujours parallèles aux tangentes menées par les extrémités de la tangente fixe.

Autrement dit, *la somme des inclinaisons des tangentes mobiles* KN, Kn *sur la tangente fixe* MM′ *est constante.*

13. Cette propriété conduit à un théorème fondamental, d'où M. Humbert a tiré élégamment une foule de propositions intéressantes (*).

En effet, soient t_1, t_2, t_3 les trois tangentes issues d'un point quelconque K, et t'_1, t'_2, t'_3 celles issues d'un second point K′; t_1 et t'_1 se coupent en un point d'où nous menons une troisième tangente t. Les mêmes lettres désignant les inclinaisons de ces tangentes sur un axe quelconque $z'z$, on a par le théorème du § 12 :

$$t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + t'_1 + t = t'_1 + t'_2 + t'_3.$$

14. On peut remarquer l'énoncé suivant de la construction indiquée au § 11 :

Lorsqu'une corde du cercle tritangent se meut parallèlement à elle-même, les tangentes primaires menées en ses extrémités se coupent constamment sur la tangente perpendiculaire à la corde mobile.

Si la corde mobile passait par un point fixe, les tangentes primaires menées en ses extrémités se couperaient sur une ellipse tritangente à l'hypocycloïde.

Pour le moment, nous nous bornons à faire remarquer que cette ellipse est le lieu du symétrique, par rapport à la corde, du point secondaire de la tangente perpendiculaire à la corde.

15. Considérons les couples de tangentes issues d'un point K mobile sur une tangente fixe MM′; si par un même point on mène des couples de parallèles à ces couples de tangentes, on obtient une involution par symétrie qui marque sur la droite de l'infini une involution de couples de points dans laquelle les

(*) *Nouvelles Annales,* 1893, pp. 37 à 65.

points cycliques sont conjugués. On en conclut le théorème suivant :

Étant donnée sur une droite u *une ponctuelle projective avec une involution marquée sur la droite de l'infini et ayant pour points conjugués les deux points cycliques, les droites qui joignent deux éléments correspondants enveloppent une hypocycloïde tangente à* u.

16. Pour trouver les tangentes issues d'un point K de la tangente MM′, on peut décrire, du centre M avec le rayon MK, une circonférence; celle-ci coupe MM′ en K et F et le cercle tritangent en N′, *n*′. Ces derniers points sont les points secondaires de deux couples de tangentes rectangulaires N′K et N′F, *n*′K et *n*′F.

Cette construction fait ressortir certaines propriétés de l'hypocycloïde.

Nous voyons d'abord que les deux tangentes issues d'un point quelconque N′ du cercle tritangent rencontrent les deux tangentes issues d'un autre point quelconque *n*′ de ce cercle en des points K, F d'une même tangente, et que le milieu de la distance KF est le point primaire de cette nouvelle tangente. Par analogie, les deux autres points d'intersection W, W′ des deux couples de tangentes se trouvent également sur une tangente. Comme W*n*′ et W′N′ sont deux hauteurs du triangle FWW′, la droite WW′ est perpendiculaire à MM′ et par suite se confond avec M′G′.

Lorsque K parcourt la tangente MM′, la corde *nn*′ du cercle tritangent reste toujours perpendiculaire à ωM. De là ce théorème :

Lorsqu'une corde N′n′ *du cercle tritangent se déplace parallèlement à elle-même, les deux couples de tangentes secondaires menées par ses extrémités se coupent mutuellement en deux couples de points qui se déplacent sur deux tangentes rectangulaires fixes.*

17. Le théorème suivant, dû à Laguerre, a déjà été signalé

ci-dessus (§ 7); c'est un simple corollaire de la proposition du § 15, mais on peut aussi le déduire de ce qui précède :

Lorsque les tangentes à une hypocycloïde tournent d'un même angle autour de leur point d'intersection avec une tangente fixe MM', *elles envelopperont une seconde hypocycloïde.*

Supposons que la tangente FN', tournant autour de F d'un angle δ, prenne la position FH, alors l'angle $N'MH = 2\delta$; donc le lieu des points H sera la circonférence ω qui aura tourné de l'angle 2δ autour de M. La tangente à l'hypocycloïde qui fait avec MM' l'angle δ est venue coïncider avec MM'. Il en résulte que la construction des tangentes au moyen de circonférences de centre M étant appliquée au cercle ω après sa rotation, donnera les tangentes primitives après leur rotation.

La nouvelle hypocycloïde est égale à la première et passe par les mêmes extrémités E, E' de la tangente MM'.

Nous démontrons encore un autre théorème de Laguerre. Le triangle M'*n*G est rectangle en *n*; si l'on mène la droite *n*X équipollente au diamètre G'M, les deux triangles K*n*X et *n*M'G sont égaux, parce que les côtés K*n* et *n*M', *n*X et M'G sont égaux et ont des directions symétriques par rapport à N*n*; on en conclut que l'angle *n*KX est droit. Par conséquent :

Si par les points primaires des tangentes à une hypocycloïde on mène des droites équipollentes à un diamètre fixe du cercle tritangent, les projections des extrémités de ces droites sur les tangentes correspondantes ont pour lieu géométrique une tangente fixe.

Le lieu des points X est le cercle ω auquel on imprime une translation mesurée par G'M. La projetante KX, d'après le théorème précédent, enveloppe une hypocycloïde.

IV

18. Les podaires de l'hypocycloïde ont été étudiées par MM. G. de Longchamps et Brocard; je vais indiquer ici la génération de quelques-unes de ces courbes et étudier une transformation qui se rencontre dans cette étude.

Pour abréger le discours, je désignerai par [AB] la circonférence décrite sur le segment de droite AB comme diamètre.

Une remarque très simple ramène en quelque sorte toutes les podaires de l'hypocycloïde à celle du centre ω du cercle tritangent. Cette dernière, appelée *trifolium régulier*, a pour équation

$$\rho = R \cos 3\omega.$$

Voici la remarque dont il est question. Si G, G′ sont les projections de deux points fixes J, J′ sur une tangente variable à une courbe donnée et que l'on projette J′ en L sur la droite JG, le lieu du point L est la circonférence [JJ′] et l'on a LG = J′G′. Par suite, si l'on imprime à la podaire de J′ une translation mesurée par J′J, le rayon vecteur de l'une des podaires est la somme des rayons vecteurs correspondants de l'autre podaire et de la circonférence [JJ′].

19. Soit *s* le symétrique du sommet S de l'hypocycloïde par rapport au centre ω du cercle tritangent. La podaire de ce point, qui a reçu le nom de *trifolium droit*, est représentée par

$$\rho = 2R \cos \omega \cos 2\omega.$$

Pour la construire, *menons dans le cercle* [Ss] *une corde quelconque* PQ *perpendiculaire au diamètre* Ss; *les pieds des hauteurs* PP′, QQ′ *du triangle variable* sPQ *décrivent un trifolium droit* (fig. 4).

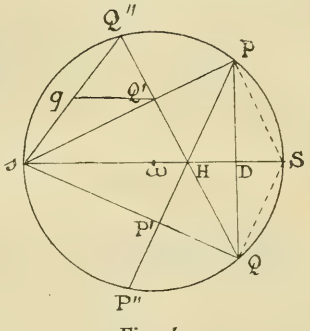


Fig. 4.

En effet, d'après une propriété connue de l'orthocentre d'un triangle, on a HD = DS, HQ′ = Q′Q″, HP′ = P′P″; donc les triangles SPH, SQH sont isocèles (§ 6).

La podaire d'un point quelconque J du cercle tritangent admet une génération analogue. Elle a reçu le nom de *trifolium oblique* et a pour équation

$$\rho = 4R \cos(2\omega - \alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

l'axe polaire étant dirigé suivant le diamètre Jω.

JF *étant la tangente primaire en* J, *menons une corde quelconque* PQ *perpendiculaire à* JF ; *les pieds des hauteurs* PP′, QQ′ *du triangle* JPQ *appartiennent à un trifolium oblique* (fig. 5).

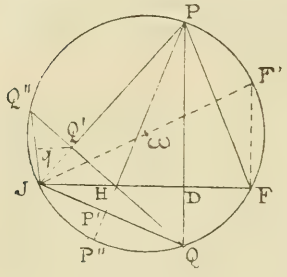


Fig. 5.

En effet, les triangles PHF, QHF étant isocèles, HP et HQ enveloppent une hypocycloïde tritangente au cercle ω (voir aussi § 5).

Voici des variantes de cette construction :

a) On détermine les points P′, Q′ au moyen de la circonférence [PQ].

b) Une circonférence de centre J et de rayon variable rencontre la circonférence ω en P″, Q″ et la droite JF en H ; on prend les milieux P′, Q′ des droites HP″, HQ″ (comparer § 16).

c) Soit *q* le milieu de la droite JQ″, la droite *q*Q′ est parallèle à JF et égale à J*q*. Par conséquent : *Si dans la circonférence* [Jω], *on trace une corde quelconque* Jq *et qu'on porte sa longueur à partir de* q *sur une parallèle à* JF, *on obtient un point de la podaire de* J.

20. Un point de rebroussement U est symétrique du sommet S par rapport au point *s*. La podaire de U, appelée *folium simple* ou *ovoïde*, a pour équation

$$\rho = 4R\cos^3\omega.$$

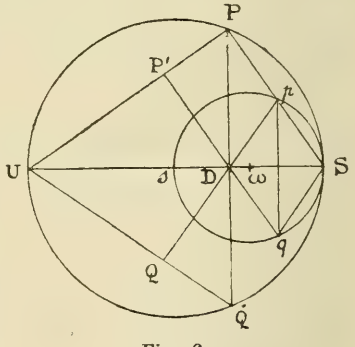


Fig. 6.

On l'obtient en construisant (fig. 6) dans le cercle [SU] une corde quelconque PQ perpendiculaire au diamètre SU et en projetant sur les cordes UP, UQ le milieu D de PQ. En effet, la circonférence [S*s*] rencontre la droite SP en son milieu *p* et la corde *pq* de ce cercle perpendiculaire à SU étant égale et

parallèle à PD, la droite Dq est le prolongement de P′D ; le triangle SqD étant isocèle, qD enveloppe une hypocycloïde (§ 6).

21. Plus généralement, si dans un cercle [JG] (fig. 7) on mène une corde variable PQ perpendiculaire à une corde fixe JF

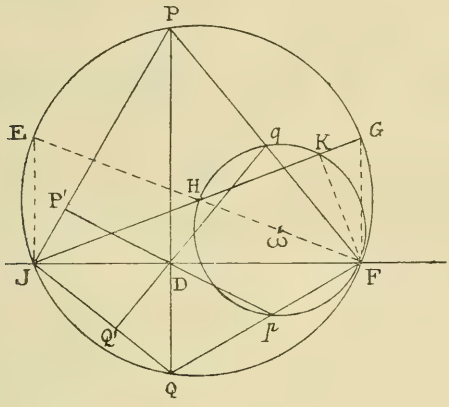


Fig. 7.

en D, les projections P′, Q′ du point D sur les cordes JP, JQ engendrent une courbe que M. de Longchamps a étudiée sous le nom de *folium double oblique*. L'équation de cette courbe est

$$\rho = a\cos^3\omega + b\sin\omega\cos^2\omega,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by);$$

l'axe polaire est JF, a et b désignent les longueurs JF et FG.

Pour reconnaître la nature de l'enveloppe des droites DP′, DQ′, soient p, q les points où elles rencontrent respectivement les cordes FQ, FP. On a

$$\textit{angle } p\mathrm{DF} = \mathrm{JDP}' = \mathrm{JPQ} = \mathrm{QFD};$$

donc le triangle pDF est isocèle et p est le milieu de la corde FQ. Ce triangle étant isocèle et p décrivant la circonférence [FH], la droite Dp enveloppe une hypocycloïde tritangente au cercle [FH].

Lorsque PQ passe par J, DP′ devient JF et DQ′ est remplacée par le diamètre JG; lorsque PQ passe par F, les droites DP′, DQ′ sont remplacées par une perpendiculaire FK à JG et par FG. Ceci montre que JG est une tangente à l'hypocycloïde, qui rencontre la courbe en J et G, où les tangentes sont JF et GF.

Ainsi, *le folium double oblique est la podaire d'un point de l'hypocycloïde.* Ce résultat est peut-être nouveau.

22. La podaire du sommet S, représentée par l'équation

$$\rho = 2R \cos\omega \sin^2\omega,$$

a été appelée *folium double droit* ou *bifolium droit.*

En appliquant les procédés indiqués pour le trifolium et le

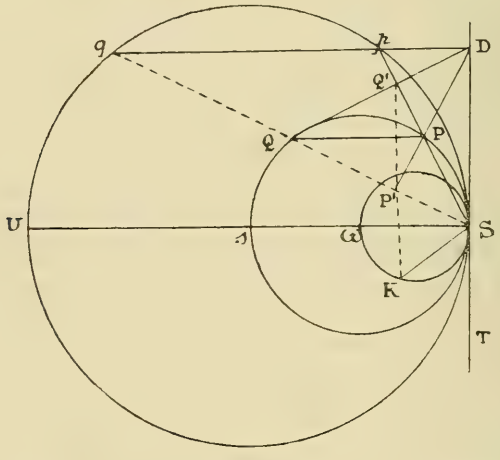


Fig. 8.

bifolium obliques, on trouve (fig. 8) les constructions suivantes (JF est à remplacer par ST) :

a) Mener dans le cercle [S*s*] une corde quelconque PQ perpendiculaire à ST et projeter P sur la corde SQ, Q sur la corde SP;

b) Mener dans le cercle [SU] une corde *pq* perpendiculaire à ST en D et projeter D sur les cordes S*p*, S*q*;

c) Tracer une corde quelconque SK du cercle [Sω] et porter sur une parallèle à ST une longueur KP′ = SK.

23. La construction du folium double oblique (§ 21) en partant du cercle rentre dans la transformation suivante :

On donne (fig. 9) *une courbe* U, *un axe* Ox *et un point* O *sur cet axe.*

On projette un point quelconque P *de* U *en* Q *sur l'axe et le point* Q *en* p *sur le rayon vecteur* OP. *Étudier le lieu du point* p *et l'enveloppe de la droite* Qp.

Connaissant la tangente AB *au point* P *de la courbe* U, *on demande de tracer la tangente au point* p *de la courbe* (p) *et de déterminer le point de contact* M *de la droite* Qp *avec son enveloppe.*

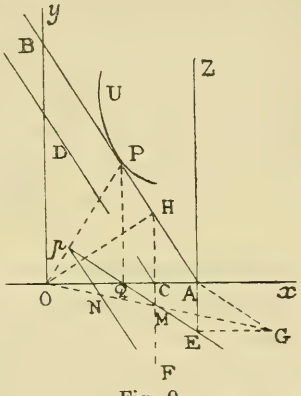


Fig. 9.

Soient (r, ω), (ρ, ω) les coordonnées polaires et (x, y), (X, Y) les coordonnées cartésiennes rectangulaires des points p et P ; on a les formules

$$r = \rho \cos^2\omega ; \tag{7}$$

$$x = \frac{X^3}{X^2 + Y^2}, \qquad y = \frac{YX^2}{X^2 + Y^2} ; \tag{8}$$

$$X = \frac{x^2 + y^2}{x}, \qquad Y = \frac{(x^2 + y^2)y}{x^2}. \tag{9}$$

De l'égalité (7), on déduit, en dérivant directement ou en prenant la dérivée logarithmique :

$$r' = \rho' \cos^2\omega - \rho \sin 2\omega, \tag{10}$$

$$\frac{r'}{r} = \frac{\rho'}{\rho} - 2 \operatorname{tg} \omega, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} V - 2 \operatorname{tg} \omega ; \tag{11}$$

V et v désignent les inclinaisons des tangentes en P et p sur le rayon vecteur OP.

La relation (10) ne paraît pas conduire à une construction assez simple de la normale en p. De l'équation (11) on déduit le procédé suivant : Mener par O une parallèle à AB qui coupe Qp en T, prendre sur Tp une longueur $Tt = 2Qp$ et mener par p une parallèle à la droite Ot.

Une droite $aX + bY + c = o$ se transforme en une cubique circulaire

$$(ax + by)(x^2 + y^2) + cx^2 = 0.$$

Inversement, la droite $ax + by + c = o$ est la transformée de la cubique

$$(aX + bY)X^2 + c(X^2 + Y^2) = 0.$$

Étudions géométriquement le cas où le point P parcourt une droite AB rencontrant les axes rectangulaires Ox, Oy aux points A, B. La droite Qp enveloppe une parabole π, car la ponctuelle (Q) est projective avec le faisceau O(P) et, par suite, avec un faisceau de parallèles à Qp. Lorsque P est en A, Qp coïncide avec une perpendiculaire Az à Ox; lorsque P est en B, Q passe en O et Qp se confond avec Ox. On connaît donc immédiatement deux tangentes rectangulaires Az, AO de π et le point de contact O de l'une d'elles. Or, lorsqu'une parabole touche les trois côtés d'un triangle, les droites qui joignent les points de contact deux à deux passent respectivement par les sommets du triangle obtenu en menant par les sommets du premier triangle des parallèles aux côtés opposés. D'après cela, construisons le parallélogramme AQEG; la droite OG rencontrera Qp au point cherché M.

Le lieu (p) est la podaire de la parabole π par rapport à l'un de ses points; Oy est une tangente de rebroussement. La normale au point p passe au milieu de la droite OM.

Il est facile de déterminer les éléments principaux de π. En effet, lorsque P s'éloigne à l'infini sur AB, la droite Qp tend à devenir perpendiculaire à AB; donc les diamètres de π sont perpendiculaires à AB. Il résulte de là que AB est la directrice de π. La tangente au sommet s'obtient en projetant O en H

sur AB, H en C sur Ox et en menant CD parallèle à AB. Le foyer F est le symétrique de H par rapport à Ox.

Si la droite AB est parallèle à Ox, la courbe (p) est une cissoïde.

La construction du point M et de la normale pN, dans le cas d'une courbe quelconque U, résulte de ce qui précède : il suffit de remplacer U par sa tangente.

On pourrait généraliser la transformation précédente en remplaçant les vecteurs issus d'un point O de l'axe par ceux issus d'un point extérieur O′. Mais si O′ se projette sur l'axe en O, une translation mesurée par OO′ ramène le système des droites Qp à celui qui vient d'être étudié.

V

24. Un problème des plus intéressants est celui de déterminer le point W où la pédale p du point P (fig. 2) touche son enveloppe.

La solution la plus simple consiste à remarquer que p rencontre le cercle tritangent ω en deux points V, Q dont les vitesses sont dans le rapport $-2:1$ et d'en conclure que $QW = VQ$. Si le cercle des neuf points n'est pas tracé, on peut chercher le point de contact E de p' avec son enveloppe en prenant $PE = DP$; la droite HE coupera p en W.

Mais on peut aussi chercher des solutions fondées sur d'autres propriétés de la droite p et arriver même ainsi à des propositions assez curieuses.

25. Partons de la construction suivante : On projette un point quelconque A_2 du cercle O en A_1 sur la droite fixe BC et l'on mène par A_1 une parallèle p à la droite joignant A_2 à un point fixe A.

Pour trouver le point où p touche son enveloppe, on peut faire glisser le point A_2 sur la tangente au cercle O. En remplaçant A par le point diamétralement opposé sur la circonférence,

on est ramené au problème du § 23. Si l'on néglige cette remarque, la question se pose ainsi :

On donne deux droites Ox, Oy *et un point* A (fig. 10). *Une sécante, qui se déplace parallèlement à elle-même, rencontre* Ox *en* X, Oy *en* Y. *Par* X *on mène une parallèle* XZ *à la droite* AY. *Trouver le point* M *où la droite* XZ *touche son enveloppe.*

On démontre facilement que cette enveloppe est une parabole π. D'ailleurs, nous avons ici un cas particulier du théorème corrélatif de celui de Maclaurin et Braikenridge.

On trouve immédiatement quelques positions remarquables

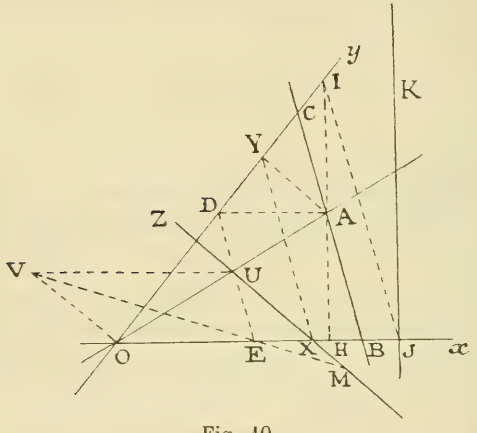


Fig. 10.

de la droite XZ, à savoir : la droite AO, la parallèle BC à XY par le point A, la tangente JK perpendiculaire à Ox, que l'on obtient en menant AI perpendiculaire à Ox et IJ parallèle à XY. Ox touche la parabole en un point E, qu'on détermine en menant AD parallèle à Ox et DE parallèle à AB. Les diamètres de π sont parallèles à Oy; la directrice est la perpendiculaire abaissée de J sur Oy.

Connaissant le triangle OUX circonscrit à la courbe et le point de contact E de l'un des côtés, il suffit de construire le parallélogramme OXUV et de tracer la droite VE qui coupera XZ au point cherché M.

26. Désignons par X, Y les points de rencontre des côtés AB, AC du triangle donné avec la tangente au point P du cercle circonscrit.

Notre problème est alors un cas particulier du suivant :

Par un point P *mobile sur le côté* XY *d'un triangle donné* AXY (fig. 11), *on mène deux droites* PV, PU *de directions données et rencontrant* AY *en* V, AX *en* U. *Déterminer le point de contact* M *de la droite* UV *avec son enveloppe.*

Nous avons de nouveau un cas particulier du théorème de Maclaurin et Braikenridge transformé par voie de dualité.

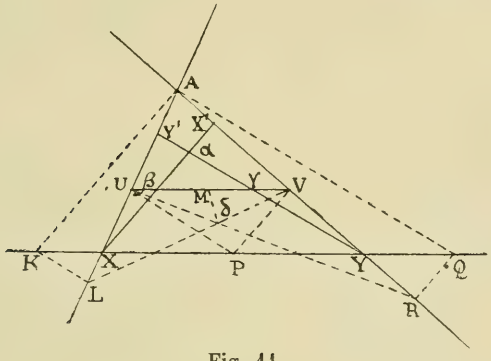


Fig. 11.

L'enveloppe cherchée est une parabole qui touche les droites AX, AY en des points L, R faciles à déterminer; car ces points doivent être les positions de U et de V qui correspondent à $V \equiv A$ ou $U \equiv A$, de sorte qu'il suffit de mener AK parallèle à PV, KL parallèle à PU, etc. Les droites VL, RU se coupant en δ, la droite Aδ détermine le point M.

Nous indiquons encore une solution fondée sur ce cas particulier du théorème de Brianchon : Si a, b, c, d, e désignent cinq tangentes d'une conique (et que l'on considère le pentagone simple circonscrit qu'elles déterminent), la droite qui joint les points ab et de, celle qui joint les points ae et bc, enfin celle qui joint le point cd au point de contact de a passent par un même point.

Les parallèles XX′ à PV et YY′ à PU étant des tangentes, on peut prendre pour a, b, c, d, e respectivement

UV, AX, XX′, YY′, AY, ou UV, XX′, AX, AY, YY′.

On verra ainsi que la droite joignant les points (UY, XV) et (XX′, YY′) et celle qui joint le point A au point d'intersection des droites βY, γX passent par M.

27. Lorsque les droites PV, PU sont perpendiculaires à AY, AX (fig. 12), la parabole π touchera les côtés AX, AY et les hauteurs XX′, YY′ du triangle AXY; cette courbe a été rencontrée plusieurs fois (*).

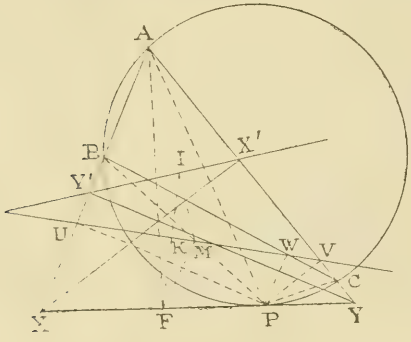


Fig. 12.

La droite X′Y′ qui passe par les sommets de deux angles droits circonscrits est la directrice de la parabole. Le pied F de la troisième hauteur, intersection des circonférences circonscrites aux deux triangles AXX′, AYY′ formés par trois tangentes, est le foyer de la courbe. Pour trouver le point M, il suffit d'abaisser sur UV une perpendiculaire FK qu'on prolonge de KI = FK, et de mener IM perpendiculaire à X′Y′.

Le triangle FIM est isocèle et deux de ses côtés, IF et IM, sont perpendiculaires à UV et X′Y′. Je dis que le troisième côté FM est perpendiculaire à BC. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que les angles (BC, UV), (UV, X′Y′) sont égaux. Or, UV étant la droite de Simson de P par rapport au triangle ABC, PW est perpendiculaire à BC, et le quadrilatère inscrit PWVC donne

$$\text{angle (BC, UV)} = \text{VWC} = \text{VPC} = 90° - \text{ACP}$$
$$= 90° - \text{APX} = \text{FAP}.$$

(*) Voir *Mathesis*, 1898, p. 131.

D'autre part, en observant que les cinq points A, U, F, P, V sont sur une même circonférence, on trouve

$$\begin{aligned} \textit{angle}\ (UV, X'Y') &= AX'Y' - AVU = AXY - APU \\ &= (90^\circ - XAF) - (90^\circ - UAP) = FAP. \end{aligned}$$

D'après cela, si l'on projette A en F sur XY, la perpendiculaire abaissée de F sur BC coupe UV au point cherché. Cette construction donne lieu au théorème suivant :

Soient A′, B′, C′ *les projections des sommets d'un triangle* ABC *sur la tangente menée au point* P *de la circonférence circonscrite. Les perpendiculaires abaissées de* A′, B′, C′ *respectivement sur* BC, CA, AB *concourent au point où la pédale de* P *touche son enveloppe.*

28. Nous avons énoncé ce théorème dans notre mémoire *Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe*, page 76 (t. XLIV des *Mémoires* in-8° publiés par l'Académie royale de Belgique, 1890). Une démonstration élémentaire en a été publiée par M. Sollerkinsky dans le *Journal de mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps, 1891, page 137.

Qu'il nous soit permis d'en reproduire ici notre démonstration, à cause des nouvelles conséquences que nous en tirons.

a) Nous établissons d'abord ce lemme (connu) : *Étant donnés dans un même plan deux triangles quelconques* ABC, A′B′C′, *on*

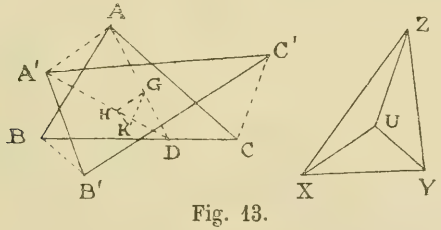


Fig. 13.

peut toujours trouver trois masses α, β, γ *qui, placées respectivement en* A, B, C *ou en* A′, B′, C′, *ont le même barycentre* G (fig. 13). En effet, G étant le barycentre des points A, B, C affectés des

masses α, β, γ, le déplacement de la masse α de A en A′ déplace le barycentre de G en H; en observant que AG, A′H doivent se couper en un point D de BC et que

$$DG : DA = DH : DA' = \gamma : \alpha + \beta + \gamma,$$

on voit que GH est équipollent à $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$ AA′. Le déplacement de la masse β de B en B′ donne à H un déplacement HK équipollent à $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$ BB′. Enfin, si le déplacement de la masse γ de C en C′ doit ramener le barycentre en G, KG est équipollent à $\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$ CC′. Par suite, G, H, K désignant les angles du triangle GHK, on a

$$\frac{\alpha.AA'}{\sin K} = \frac{\beta.BB'}{\sin G} = \frac{\gamma.CC'}{\sin H},$$

ou

$$\frac{\alpha}{BB'.\,CC'\sin K} = \frac{\beta}{CC'.\,AA'\sin G} = \frac{\gamma}{AA'.\,BB'\sin H}.$$

Si donc on mène par un même point U les vecteurs UX, UY, UZ équipollents aux vecteurs AA′, BB′, CC′, les masses α, β, γ sont proportionnelles aux aires des triangles UYZ, UZX, UXY ou sont les coordonnées barycentriques du point U dans le triangle XYZ.

b) Si ABC, A′B′C′ sont deux triples quelconques de points correspondants de trois figures directement semblables φ_a, φ_b, φ_c, la figure auxiliaire UXYZ est d'espèce constante, car les angles (BB′, CC′), (CC′, AA′), (AA′, BB′) sont constants et les longueurs AA′, BB′, CC′ sont proportionnelles à trois longueurs fixes.

Il résulte de là que dans trois figures semblables φ_a, φ_b, φ_c, il existe un point qui est le barycentre de trois points homologues quelconques pour trois masses constantes α, β, γ.

c) Considérons maintenant un triangle ABC (fig. 14) et une droite *w*. Soient P un point mobile sur *m* et A_1, B_1, C_1 ses projections sur BC, CA, AB. Les ponctuelles $[A_1]$, $[B_1]$, $[C_1]$ étant semblables, il existe trois masses α, β, γ qui, attachées en trois points

correspondants quelconques A_1, B_1, C_1, ont un barycentre constant. Si l'on considère le triangle podaire $A'_1 B'_1 C'_1$ d'un second point P′ de *w*, on voit que la figure auxiliaire UXYZ résulte de trois vecteurs UX, UY, UZ équipollents aux projections d'un segment PP′ de *w* sur BC, CA, AB. Nous construisons cette figure auxiliaire dans une position normale à sa première position. A

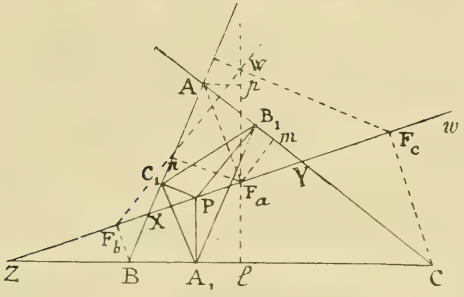


Fig. 14.

cet effet, remplaçons le segment PP′ par la perpendiculaire AF_a abaissée de A sur *w*, et les droites UX, UY, UZ de la figure 13 par les projections $F_a p$, $F_a m$, $F_a n$ de $F_a A$ sur des perpendiculaires aux côtés du triangle ABC. Les masses α, β, γ sont alors les coordonnées barycentriques du point F_a par rapport au triangle *pmn*. Si δ_a, δ_b, δ_c sont les angles de *w* avec BC, CA, AB, on trouve facilement

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\sin A}{\cos \delta_a} : \frac{\sin B}{\cos \delta_b} : \frac{\sin C}{\cos \delta_c}.$$

Remarquons aussi que le point F_a appartient à la circonférence circonscrite au triangle *pmn* et que ce triangle est inversement semblable à ABC.

Cela posé, si l'on construit le centre des masses α, β, γ placées aux projections *l*, *m*, *n* du point F_a sur les côtés de ABC, on voit que la droite lF_a passe par ce centre. On déduit de là cette première conséquence :

Si l'on projette les sommets d'un triangle ABC *en* F_a, F_b, F_c *sur une droite quelconque* w, *les perpendiculaires abaissées*

de F_a, F_b, F_c *respectivement sur* BC, CA, AB *concourent en un même point* W (*).

d) Soient q, q' les droites de Simson des points de rencontre Q, Q′ de w avec la circonférence circonscrite au triangle ABC. Les projections de Q ou Q′ sur BC, CA, AB sont les sommets de triangles podaires *aplatis;* leur barycentre pour les masses α, β, γ doit être W. Donc W *est l'intersection des deux droites* q, q′.

e) Si la droite w touche la circonférence ABC au point Q, les droites q, q' coïncident; donc W est le point de contact de q avec son enveloppe. C'est le résultat obtenu ci-dessus par une autre méthode.

f) On a vu que les côtés du triangle podaire $A_1B_1C_1$ (**27**) enveloppent trois paraboles π_a, π_b, π_c ayant pour foyers respectivement les points F_a, F_b, F_c et touchant deux côtés du triangle ABC et les deux hauteurs correspondantes du triangle formé par ces côtés avec w. Il est évident que les deux droites de Simson des points Q, Q′ où W rencontre la circonférence ABC, sont deux tangentes communes aux trois paraboles.

Lorsque w touche la circonférence ABC au point Q, les trois paraboles touchent la droite q au même point que l'hypocycloïde.

g) Si l'on prend pour w la tangente au point P de la circonférence ABC (fig. 2), on obtient le triangle auxiliaire XYZ de la figure 15 en projetant le diamètre OP, qui est perpendiculaire à w, sur les droites PA_1, PB_1, PC_1, qui sont perpendiculaires aux côtés du triangle ABC. Ces projections étant précisément les cordes PA_2, PB_2, PC_2, les masses α, β, γ sont les coordonnées barycentriques du point P dans le triangle $A_2B_2C_2$ ou du point D dans le triangle ABC, car les droites AA_2, BB_2, CC_2, PD ont même axe de symétrie perpendiculaire à p. Par consé-

(*) Au sujet de la transformation (w, W), on peut voir nos deux notices dans la *Nouvelle correspondance mathématique,* t. IV (1878), pp. 379-382, et dans l'*Archiv der Mathematik und Physik,* t. III (3), pp. 89-93, et aussi, dans ce dernier Recueil, les articles de M. Cwojdzinski, t. I, pp. 175-180; t. II, pp. 222-225, et t. III, p. 316; de M. Janisch, t. II, p. 153; de M. Fr. Meyer, t. I, pp. 372-373.

quent, on connaît les masses qu'il faut attacher aux points A_1, B_1, C_1 pour obtenir le point de contact W.

h) Lorsque *w* est un diamètre du cercle ABC, les droites de Simson de ses extrémités sont rectangulaires et se coupent sur le cercle des neuf points (*).

i) Supposons que la droite *w* tourne autour du point P supposé fixe. Le point W a les mêmes coordonnées barycentriques α, β, γ qu'un certain point de la circonférence ABC (par exemple, le point de contact d'une tangente parallèle à *w*). Par conséquent, le lieu du point W rapporté au triangle $A_1B_1C_1$ a la même équation barycentrique que le cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire

$$\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} = 0.$$

Ce lieu est en général une ellipse ε. Si l'on prend *w* perpendiculaire ou parallèle à un côté du triangle ABC, on voit que ε passe par les projections de P sur BC, CA, AB et par les points qu'on obtient en portant sur HA, HB, HC des longueurs respectivement égales à A_1P, B_1P, C_1P. Le centre de ε est donc au milieu de la distance HP.

Lorsque P appartient à la circonférence, le point W des droites *w* menées par P est évidemment la droite de Simson de W.

29. Reprenons le cas général du § 25 pour le traiter par la méthode de Roberval (fig. 15).

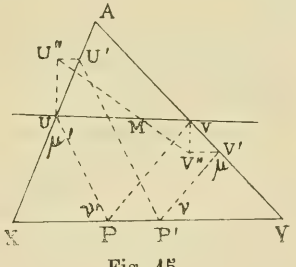


Fig. 15.

La vitesse du point P étant représentée par PP′, décomposons-la en deux autres, l'une parallèle à XA, l'autre dirigée suivant UP; la première composante représente

(*) Ce théorème, que nous avons déjà énoncé dans le Mémoire *Sur les projections et contre-projections* (p. 76), a été également trouvé par M. Soons (*Mathesis*, 1896, p. 57), et par M. Cwojdzinski (*Archiv* (3), t. I, pp. 175-180).

la vitesse de translation de la droite UP entraînée par le point U glissant sur AX. Donc, si l'on mène P'U' parallèle à PU et P'V' parallèle à PV, UU' et VV' figurent les vitesses des points U et V glissant sur AX et AY. Décomposons encore ces vitesses UU', VV' chacune en deux autres, l'une normale à UV, l'autre dirigée suivant UV. Les composantes normales UU'', VV'' représentent les vitesses de circulation des points U, V considérés comme appartenant à la droite UV ; par suite, la droite U''V'' coupe UV au point cherché M.

Pour fixer ce point, appelons μ, ν, μ', ν' les angles des droites PV, PU avec les côtés des angles Y, X, et soient U, V les angles AUV, AVU. On a les égalités

$$\frac{UM}{MV} = \frac{UU''}{VV''} = \frac{UU' \sin U}{VV' \sin V} = \frac{UU'}{VV'} \cdot \frac{AV}{AU}$$

$$\frac{UU'}{PP'} = \frac{XU}{XP}, \quad \frac{VV'}{PP'} = \frac{VY}{PY},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{MU}{MV} = \frac{UX}{UA} \cdot \frac{VA}{VY} \cdot \frac{PY}{PX}.$$

Cette formule a été établie autrement par M. d'Ocagne (*). Pour la démontrer, on peut aussi considérer le triangle AUV coupé par la transversale U'V', qui est une seconde position de la droite UV, puis passer à la limite en faisant tendre U'V' vers UV.

La formule précédente peut prendre la forme

$$\frac{MU}{MV} = \frac{VA}{UA} \cdot \frac{\sin\mu \sin\nu'}{\sin\mu' \sin\nu};$$

elle se réduit à

$$\frac{MU}{MV} = \frac{AV}{AU} \cdot \frac{\sin\nu'}{\sin\nu},$$

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1880, p. 273; *Journal de math. élém.*, 1885, p. 8.

lorsque $\mu' = \pi - \mu$, ce qui est le cas des pédales obliques. Dans cette dernière hypothèse, les points A, U, P, V sont sur une même circonférence, qui coupe XY en un point F (non marqué sur la figure), tel que

$$\textit{angle}\ \mathrm{AFY} = \mu', \quad \mathrm{YAF} = \nu, \quad \mathrm{XAF} = \nu'.$$

Les perpendiculaires abaissées de V et U sur AF étant égales à $\mathrm{AV}\sin\nu$, $\mathrm{AU}\sin\nu'$, on est conduit à introduire la symétrique AF′ de la droite AF par rapport à la bissectrice de l'angle XAY; AF′ coupera UV en un point M′ tel que

$$\frac{\mathrm{M'V}}{\mathrm{M'U}} = \frac{\mathrm{AV}\sin\nu'}{\mathrm{AU}\sin\nu}.$$

Le point cherché M est le symétrique de M′ par rapport au milieu de UV.

Enfin, si les angles μ, μ' sont droits, on a simplement

$$\frac{\mathrm{MU}}{\mathrm{MV}} = \frac{\mathrm{AV}\cos\mathrm{X}}{\mathrm{AU}\cos\mathrm{Y}}.$$

AF sera la perpendiculaire abaissée de A sur XY, et la droite AF′ sera dirigée suivant un diamètre du cercle circonscrit au triangle AXY.

30. La méthode de Roberval, convenablement appliquée dans le cas de la droite de Simson ordinaire, conduit à un théorème remarquable trouvé autrement par M. Ed. Collignon (*).

Rapportons-nous à la figure 2 et aux notations du § 7. Si l'on convient de faire tourner d'un angle droit toutes les vitesses autour de leurs points d'application, on peut représenter la vitesse du point P sur la circonférence O par le diamètre dirigé suivant PO. Ses composantes parallèles aux côtés AB, AC, BC seront figurées par les cordes PC_2, PB_2, PA_2; par suite, les

(*) *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1905, vol. XXIII, pp. 6 et 9.

vitesses de glissement des points C_1, B_1, A_1 sur AB, AC, BC le seront par les droites $C_1C_3 = C_2P$, $B_1B_3 = B_2P$, $A_1A_3 = A_2P$. Les composantes normales à la pédale p, de ces vitesses de glissement le seront par les projections des droites C_1C_3, B_1B_3, A_1A_3 sur p. Or les points C_3, B_3, A_3 se projettent en un même point de p. Pour démontrer cette propriété pour C_3 et B_3, observons qu'elle revient à dire que la somme des projections de C_1C_3 et B_1B_3 sur C_1B_1 est égale à C_1B_1; ou encore, à cause de $C_1C_3 = C_2P_3$, $BB_1 = PB_2$, que la projection de la corde C_2B_2 sur C_1B_1 est égale à C_1B_1; ou enfin, puisque AA_2, BB_2, CC_2, p sont perpendiculaires à un même diamètre du cercle O, que la projection de BC sur B_1C_1 est égale à BC. Construisons le parallélogramme BCB_1N et traçons la droite C_1N. Les triangles PC_1B, PCB_1 étant semblables, on a

$$\frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BC_1}{BN} = \frac{PB}{BC}.$$

L'angle NBC_1 étant égal à CPB, les triangles PBC, BC_1N sont également semblables, et comme ils ont deux couples de côtés homologues perpendiculaires, les côtés restants B_1C_1 et C_1N le sont aussi; donc BC équipollent à B_1N se projette sur B_1C_1 suivant une droite égale à B_1C_1. Ainsi, les points C_2, B_2, A_2 se projettent en un même point W de p; par suite, les vitesses de rotation des points C_1, B_1, A_1 considérés comme appartenant à p étant proportionnelles aux distances WC_1, WB_1, WA_1, W est le point autour duquel p tourne pendant un temps infiniment petit; c'est donc le point de contact de p avec son enveloppe. On a donc ce théorème :

Soit ABC *un triangle inscrit dans un cercle* O, P *un point pris arbitrairement sur la circonférence. On abaisse sur les côtés les perpendiculaires* PA_1, PB_1, PC_1 *qui recoupent la circonférence en* A_2, B_2, C_2. *On prend ensuite sur* PA_1, PB_1, PC_1 *les segments*

$$A_1A_3 = A_2P, \quad B_1B_3 = B_2P, \quad C_1C_3 = C_2P.$$

Les trois points A_3, B_3, C_3 *seront sur une même perpendiculaire à la pédale* $A_1B_1C_1$ *et la rencontrent au point de contact de la pédale avec son enveloppe.*

Ce théorème de M. Collignon suggère immédiatement d'autres constructions du point W. Ainsi, si l'on projette les points A_2, B_2, C_2 sur p' en A_4, B_4, C_4, on a $WA_1 = PA_4$, $WB_1 = PB_4$, $WC_1 = PC_4$. Donc *les droites* A_1A_4, B_1B_4, C_1C_4 *sont équipollentes à* WP.

Soient A_5, B_5, C_5 les milieux des segments PA_4, PB_4, PC_4. On voit facilement que *les droites* A_1A_5, B_1B_5, C_1C_5 *concourent en un point* K *qui est le symétrique de* W *par rapport à* P. Cette dernière proposition revient à un théorème de M. d'Ocagne (*).

(*) *Journal de mathém. élément.*, 1885, p. 11.

3 2044 106 293 293